సగటు-1

సగటును సరాసరి లేదా అంకగణిత సగటు లేదా అంకమధ్యమం లేదా మధ్యమం అని కూడా పిలుస్తారు. ఒక సమూహంలోని అన్ని రాశులకు ప్రాతినిధ్యం వహించే రాశిని ఆ సమూహం సగటు లేదా సరాసరి అని అంటారు.

$$\text{సగటు} = \frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$$

రాశుల మొత్తం = సగటు $\times$ రాశుల సంఖ్య

గమనిక:

రాశుల సగటును కనుక్కోవాలంటే ఆ రాశులన్నీ ఒకే ప్రమాణంలో ఉండాలి.

ఉదాహరణ:

కింది రాశుల సగటు ఎంత?

2 గంటలు, 4 గంటలు, 6 గంటలు, 90 నిమిషాలు, 3600 సెకన్లు.

సమాధానం:

ఇచ్చిన రాశులన్నింటినీ గంటల్లోకి మార్చి రాస్తే....

2 గంటలు, 4 గంటలు, 6 గంటలు, 1.5 గంటలు, 1 గంట

సగటు = $\frac{2+4+6+1.5+1}{5}$ గంటలు

$= \frac{14.5}{5} = 2.9$ గంటలు

= 2.9×60 నిమిషాలు

= 174 నిమిషాలు

= 2 గంటల 54 నిమిషాలు

$\therefore$ సగటు = 2 గంటల 54 నిమిషాలు

ఉదాహరణ:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ల సగటు ఎంత?

సమాధానం:

సగటు = $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{4}$

$= \dfrac{30+20+15+12}{60} \times \dfrac{1}{4}$

$= \dfrac{77}{240}$

$\therefore$ సగటు = $\dfrac{77}{240}$

ముఖ్యమైన సూత్రాలు:

1. మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల సగటు = $\dfrac{n+1}{2}$
2. మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల వర్గాల సగటు = $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$
3. మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల ఘనాల సగటు = $\dfrac{n(n+1)^2}{4}$
4. మొదటి 'n' బేసి సంఖ్యల సగటు = 'n'
5. మొదటి 'n' సరిసంఖ్యల సగటు = $n+1$
6. కింది మొదటి 25 ప్రధాన సంఖ్యలను గుర్తుంచుకోవాలి.

   2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

   (ఇవన్నీ 100 లోపు ప్రధాన సంఖ్యలు)

ఉదాహరణ:

మొదటి 999 సహజ సంఖ్యల సగటు ఎంత?

సమాధానం:

సగటు = $\dfrac{999+1}{2}$

$= 500$

$\therefore$ మొదటి 999 సహజ సంఖ్యల సగటు = 500

ఉదాహరణ:

మొదటి 30 సహజ సంఖ్యల వర్గాల సగటు ఎంత?

సమాధానం:

సగటు = $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

$$=\frac{(30+1)(2\times30+1)}{6}$$

$$=\frac{(31)(61)}{6}$$

$$=\frac{1891}{6}$$

$\therefore$ సగటు = $\frac{1891}{6}$

ఉదాహరణ:

మొదటి 100 సరి సంఖ్యల సగటు, మొదటి 100 బేసి సంఖ్యల సగటుల మధ్య భేదం?

సమాధానం:

మొదటి 100 సరి సంఖ్యల సగటు = 100+1

= 101

మొదటి 100 బేసి సంఖ్యల సగటు = 100

పై రెండింటి భేదం = 101 – 100

= 1

$\therefore$ సమాధానం = 1

ఉదాహరణ :

ఏడు వరుస సహజ సంఖ్యల సగటు 150. అయితే అందులో కనిష్ట, గరిష్ట సంఖ్యలను కనుగొనండి.

సమాధానం:

ఏడు వరుస సహజ సంఖ్యలను కింది విధంగా అనుకొంటే...

$x-3,\ x-2,\ x-1,\ x,\ x+1,\ x+2,\ x+3$

సగటు =

$$\frac{x-3+x-2+x-1+x+x+1+x+2+x+3}{7}$$

$=\frac{7x}{7} = x$

కాని దత్తాంశం ప్రకారం వాటి సగటు = 150

$\therefore \ x = 150$

కనిష్ట సంఖ్య = $x - 3 = 150 - 3$
$= 147$

గరిష్ట సంఖ్య = $x + 3 = 150 + 3 = 153$

ఉదాహరణ :

ఆరు వరుస బేసి సంఖ్యల సగటు 64 అయితే ఆ సంఖ్యలన కనుగొనండి.

సమాధానం:

ఆరు వరుస బేసి సంఖ్యలను కింది విధంగా అనుకొంటే...

$2x–5, 2x–3, 2x–1, 2x+1, 2x+3, 2x+5$

సగటు =

$$\frac{2x-5+2x-3+2x-1+2x+1+2x+3+2x+5}{6}$$

$$=\frac{12x}{6}=2x$$

కాని దత్తాంశం ప్రకారం వాటి సగటు = 64

$\therefore 2x = 64$

$\therefore$ ఆ సంఖ్యలు

$64 – 5, 64 – 3, 64 –1, 64 + 1, 64 + 3, 64 + 5$ అంటే...

59, 61, 63, 65, 67, 69

ఉదాహరణ:

మొదటి పది ప్రధాన సంఖ్యల సగటు ఎంత?

సమాధానం:

మొదటి పది ప్రధాన సంఖ్యలు

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

సగటు =

$$\frac{2+3+5+7+11+13+17+19+23+29}{10}$$

$$=\frac{129}{10}$$

$= 12.9$

∴ **సమాధానం = 12.9**

సగటు-2

ఇంతకు ముందటి ఆర్టికల్‌లో 'సగటు'కు సంబం ధించిన ప్రాథమిక అంశాలను నేర్చుకున్నాం. ఇప్పుడు మరికొన్ని ప్రశ్నలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణలు

1. అంకెల స్థానాలను పరస్పరం మార్చినప్పటికీ విలువ మారని రెండంకెల సంఖ్యల సగటు ఎంత? (సి.డి.ఎస్. 2003)

సమాధానం:

సగటు =

$$\frac{11+22+33+44+55+66+77+88+99}{9}$$

$$= \frac{(11+99)+(22+88)+(33+77)+(44+66)+55}{9}$$

$$= \frac{110+110+110+110+55}{9}$$

$$= \frac{495}{9}$$

$= 55$

$\therefore$ సగటు = 55

2. 25 మంది విద్యార్థులు ఉన్న ఒక తరగతి సగటు వయసు 15 ఏళ్లు. ఇందులోకి టీచరు వయసును కూడా పరిగణనలోకి తీసుకుంటే మొత్తం సగటు వయసు ఏడాది పెరుగు తుంది. అయితే టీచరు వయసు ఎంత?

సమాధానం:

రాశుల మొత్తం = రాశుల సంఖ్య × సగటు

అనే సూత్రాన్ని అనుసరించి..

25 మంది విద్యార్థుల వయసుల మొత్తం = 25 × 15

= 375 ఏళ్లు.

టీచరును కూడా పరిగణనలోకి తీసుకుంటే (మొత్తం 26 మంది) వచ్చే సగటు = 15+1 = 16 ఏళ్లు.

26 మంది వయసుల మొత్తం =

26×16

= 416 ఏళ్లు.

టీచరు వయసు = 416 – 375

= 41 ఏళ్లు.

∴ సమాధానం = 41 ఏళ్లు.

3. ఒక బ్యాట్స్‌మన్ తన 13వ ఇన్నింగ్స్‌లో 73 పరుగులు చేస్తే అతని సగటు రెండు పరుగులు పెరిగింది. అయితే 13వ ఇన్నింగ్స్‌కు ముందు ఆ బ్యాట్స్‌మెన్ సగటు ఎంత?

సమాధానం:

12వ ఇన్నింగ్స్ వరకు బ్యాట్స్‌మెన్ సగటు = x అనుకుంటే

అప్పుడు 12వ ఇన్నింగ్స్ వరకు అతడు చేసిన మొత్తం పరుగులు = 12 x

దత్తాంశం ప్రకారం

$$12x + 73 = 13(x+2)$$

$$\Rightarrow 73 - 26 = 13x - 12x$$

$$\Rightarrow x = 47$$

∴ 13వ ఇన్నింగ్స్‌కు ముందు బ్యాట్స్‌మెన్ సగటు = 47

4. తరగతిలోని 50 మంది విద్యార్థుల్లో 30 మంది బాలురు, 20 మంది బాలికలు ఉన్నారు. ఒక పరీక్షలో బాలుర సగటు మార్కులు 40, బాలికల సగటు మార్కులు 45. అయితే ఒక బాలుడి మార్కులు '60'కి బదులు '30', ఒక బాలిక మార్కులు '50'కి బదులు '70'గా తప్పుగా తీసుకున్నారు. బాలుర, బాలికల సరైన సగటులను, తరగతి సగటులను కనుగొనండి?

(ఏపీపీఎస్సీ, గ్రూప్–1–2008)

సమాధానం:

'30' మంది బాలుర సరైన మార్కులు మొత్తం = $30 \times 40 - 30 + 60$

= 1200– 30+60

= 1230 $\rightarrow$ (1)

∴ బాలుర సరైన సగటు = $\frac{1230}{30}$

= 41 మార్కులు

అలాగే '20' మంది బాలికల సరైన మార్కుల మొత్తం = $20 \times 45 - 70 + 50$

= 900 – 70+50

= 880 $\rightarrow$ (2)

∴ బాలికల సరైన సగటు = $\frac{880}{20}$

= 44 మార్కులు

(1), (2)ల నుంచి తరగతిలోని '50' మంది సరైన మార్కులు మొత్తం =

1230 + 880 = 2110

$\therefore$ తరగతి సగటు = $\frac{2110}{50}$

= 42.2 మార్కులు

5. ఒక దత్తాంశం సగటు 50. ఆ దత్తాంశంలో ప్రతి రాశిని 5తో భాగించి, ఆ తర్వాత '3' తీసివేస్తే ఏర్పడే కొత్త దత్తాంశం సగటు ఎంత?

సమాధానం:

ఒక దత్తాంశంలోని ప్రతి ఒక్క రాశిపై ప్రయోగించిన ప్రాథమిక గణిత ప్రక్రియలను (+, –, ×, ÷) అదే క్రమంలో సగటు మీద ప్రయోగిస్తే కొత్త దత్తాంశం సగటు వస్తుంది. పై సూత్రాన్ని అనుసరించి ఇచ్చిన దత్తాంశ సగటు '50'ని 5తో భాగించి, '3'ను తీసివేస్తే,

$\frac{50}{5} - 3$

= 10 – 3

= 7 వస్తుంది.

$\therefore$ కొత్తగా ఏర్పడిన దత్తాంశ సగటు = 7

6. 3 ఏళ్ల క్రితం 5 మంది సభ్యులు ఉన్న ఒక కుటుంబం సగటు వయసు '17' ఏళ్లు. తర్వాత ఆ కుటుంబంలో ఒక బిడ్డ జన్మించింది. ప్రస్తుతం కూడా ఆ కుటుంబం సగటు వయసు 17 ఏళ్లే. అయితే ఆ బిడ్డ ప్రస్తుత వయసును కనుగొనండి? (ఎస్.ఎస్.సి. 2004)

సమాధానం:

5 మంది సగటు వయసు 3 ఏళ్ల క్రితం 17 ఏళ్లు. కాబట్టి ప్రస్తుతం 5 మంది సగటు వయసు = 17 + 3

= 20 ఏళ్లు.

ప్రస్తుతం 5 మంది వయసుల

మొత్తం = 20 × 5

= 100 ఏళ్లు.

కొత్తగా జన్మించిన బిడ్డ ప్రస్తుత వయసు 'x' అనుకుంటే

దత్తాంశం ప్రకారం ప్రస్తుతం '6' మంది కుటుంబ సభ్యుల సగటు వయసు కూడా 17 ఏళ్లే. అంటే

$\frac{100 + x}{6} = 17$

$\Rightarrow 100 + x$

$= 17 \times 6 = 102$

$\Rightarrow \ x = 2$

అంటే ఆ బిడ్డ ప్రస్తుత వయసు

= 2 ఏళ్లు.

7. ఒక తరగతిలోని విద్యార్థుల సగటు వయసు 15.8 ఏళ్లు. ఆ తరగతిలోని బాలుర సగటు వయసు 16.4 ఏళ్లు, బాలికల సగటు వయసు 15.4 ఏళ్లు. అయితే తరగతి ఉన్న బాలుర, బాలికల నిష్పత్తిని కనుగొనండి?

(ఎస్‌బీఐ పీఓ 2002)

సమాధానం:

తరగతిలోని బాలురను సంఖ్య = 'a',

బాలికలను సంఖ్య = 'b' అనుకుంటే

అప్పుడు మొత్తం విద్యార్థులు = a + b

బాలుర వయసుల మొత్తం + బాలికల వయసుల మొత్తం

= తరగతిలోని అందరి వయసుల మొత్తం

$\therefore\ 16.4\ a + 15.4\ b = 15.8\ (a+b)$

$\Rightarrow 16.4\ a - 15.8\ a$

$= 15.8\ b - 15.4\ b$

$\Rightarrow 0.6\ a = 0.4\ b$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{0.4}{0.6} = \frac{2}{3}$

అంటే తరగతిలోని బాలుర సంఖ్యకు, బాలికల సంఖ్యకు గల నిష్పత్తి = $\frac{2}{3}$

లేదా 2 : 3

$\therefore$ సమాధానం = 2 : 3

నంబర్ సిరీస్ - మాదిరి ప్రశ్నలు

1. 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

   ఎ) 56 బి) 55 సి) 54 డి) 53

2. 2, 6, 21, 88, ...

   ఎ) 435 బి) 440 సి) 445 డి) 345

3. 3, 7, 16, 35, ...

   ఎ) 73 బి) 74 సి) 72 డి) 70

4. 2, 4, 12, 48, ...

ఎ) 144 బి) 96 సి) 192 డి) 240

5. 324, 196, 256, 169, ...

ఎ) 225 బి) 196

సి) 144 డి) ఏదీ కాదు

6. 3, 9, 21, 45, ...

ఎ) 90 బి) 93 సి) 92 డి) 91

7. 0, 2, 10, 42, ...

ఎ) 170 బి) 68

సి) 166 డి) ఏదీ కాదు

8. 1, 4, 15, ... 325

ఎ) 63 బి) 64

సి) 80 డి) ఏదీ కాదు

9. 2, 3, 7, ..., 121

ఎ) 26 బి) 28

సి) 25 డి) ఏదీ కాదు

10. 7, 10, 19, ..., 127

ఎ) 46 బి) 100 సి) 81 డి) 49

సమాధానాలు

1 బి	2 సి	3 బి	4 డి
5 బి	6 బి	7 ఎ	8 బి
9 సి	10 ఎ		

సగటు-3

విభిన్న గ్రూపుల సగటు:

ఒక గ్రూపులోని రాశుల సంఖ్య 'P', సగటు 'x', మరొక గ్రూపులోని రాశుల సంఖ్య 'q', సగటు 'y' అయితే ఆ రెండు గ్రూపులను కలిపితే ఏర్పడే మిశ్రమ గ్రూపు సగటు =

$$\frac{Px+qy}{P+q}$$

ఒకవేళ మూడు గ్రూపులు ఉన్నట్లయితే (మూడో గ్రూపులోని రాశుల సంఖ్య 'r', సగటు 'z' అయితే), మిశ్రమ గ్రూపు సగటు =

$$\frac{Px+qy+rz}{P+q+r}$$

ఉదాహరణ:

1000 మంది ఉద్యోగులు ఒక కంపెనీలో ఉద్యోగి సగటు జీతం రు. 10,000. పురుష ఉద్యోగుల సగటు జీతం రు. 10,400, మహిళా ఉద్యోగుల సగటు జీతం రు. 8,400. అయితే కంపెనీలోని మహిళా ఉద్యోగుల శాతమెంత?

(ఏపీపీఎస్సీ, గ్రూప్-1-మోడల్ పేపర్ 2007)

సమాధానం:

పురుష ఉద్యోగుల సంఖ్య = 'x' అను కుంటే, మహిళా ఉద్యోగుల సంఖ్య = '$1000-x$' అవుతుంది. అప్పుడు మిశ్రమ గ్రూపు సగటు సూత్రాన్ని అనుసరించి

$$\frac{10,400x+8,400(1000-x)}{x+1000-x}=10,000$$

$\Rightarrow 84,00,000 + 2,000x =$
$1,00,00,000$
$\Rightarrow 2,000x = 16,00,000$
$\Rightarrow x = 800$

$\therefore$ మహిళా ఉద్యోగుల సంఖ్య = $1000-x$
$= 1000 - 800 = 200$

మహిళా ఉద్యోగుల శాతం= $\frac{200}{1000}\times 100 = 20$

∴ కంపెనీలో 20% మహిళా ఉద్యోగులు ఉన్నారు.

ఉదాహరణ:

ఒక తరగతిలోని మొత్తం 100 మంది విద్యార్థుల సగటు మార్కులు 56. మొదటి 20 మంది విద్యార్థుల సగటు మార్కులు 85. చివరి 40 మంది విద్యార్థుల సగటు మార్కులు 20. అయితే మిగిలిన విద్యార్థుల సగటు మార్కులు ఎంత?

సమాధానం:

మొదటి 20, చివరి 40 మంది విద్యార్థులను మినహాయిస్తే, మిగిలిన విద్యార్థులు

$= 100 - 20 - 40 = 40$

ఈ 40 మంది విద్యార్థుల సగటు మార్కులు = 'x' అనుకుంటే, అప్పుడు మిశ్రమ గ్రూపు సగటు సూత్రాన్ని అనుసరించి

$$\frac{20 \times 85 + 40 \times 20 + 40x}{20 + 40 + 40} = 56$$

$$\Rightarrow 1700 + 800 + 40x = 5{,}600$$

$$\Rightarrow 40x = 3{,}100$$

$$\Rightarrow x = \frac{3{,}100}{40} = 77.5$$

∴ మిగిలిన విద్యార్థుల సగటు మార్కులు

= 77.5

సగటు–రకాలు

గణితపు సగటు మూడు రకాలు:

1. అంకగణితపు సగటు లేదా మధ్యమం:

సగటు లేదా సరాసరి అంటే సాధారణంగా అంక మధ్యమం అనే అర్థం. దీన్ని మనం ఇదివరకే చర్చించాం.

2. గుణ మధ్యమం:

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ అనే రాశుల గుణ మధ్యమం = $(x_1.x_2.x_3.\ldots.x_n)^{\frac{1}{n}}$

a, b అనే రెండు రాశుల గుణ మధ్యమం $= \sqrt{ab}$

ఉదాహరణ:

9, 4ల గుణ మధ్యమం ఎంత?

సమాధానం:

గుణ మధ్యమం = $\sqrt{9\times 4}$

$\sqrt{36}$

$= 6$

3. హరాత్మక మధ్యమం:

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ అనే రాశుల హరాత్మక మధ్యమం

$$= \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots\ldots+\frac{1}{x_n}}$$

- a, b అనే రెండు రాశుల హరాత్మక మధ్యమం = $\frac{2ab}{a+b}$
- a, b, c అనే మూడు రాశుల హరాత్మక మధ్యమం = $\frac{3abc}{ab+bc+ca}$
- ఇచ్చిన ఏదైన దత్తాంశానికి పై మూడు రకాల సగటులను కనుక్కోవచ్చు. వాటి మధ్య సంబంధం ఈ విధంగా ఉంటుంది.

  అంక మధ్యమం $\geq$ గుణ మధ్యమం $\geq$ హరాత్మక మధ్యమం.
- ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని అన్ని రాశులు సమా నంగా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే పై మూడు సగటులు కూడా సమానంగా ఉంటాయి.
- హరాత్మక మధ్యమానికి కింది రెండు ఉప యోగాలు ఉన్నాయి.

1. సగటు వేగం:

వివిధ దశల్లో ప్రయాణించిన దూరం స్థిరంగా ఉన్నప్పుడు ఆయా దశల్లోని వేగాల హరాత్మక మధ్యమమే సగటు వేగం అవుతుంది.

2. సగటు ధర:

ఒక వస్తువు కొనుగోలుపై వివిధ కాలాల్లో సమాన పెట్టుబడులు పెట్టినప్పుడు ఆయా కాలాల్లో ఆ వస్తువు ధరల హరాత్మక మధ్య మమే ఆ వస్తువు సగటు ధర అవుతుంది.

ఉదాహరణ:

ఒక వ్యక్తి P నుంచి Qకు గంటకు 3 కి.మీ. వేగంతో చేరుకున్నాడు. మళ్లీ తిరిగి Q నుంచి Pకి గంటకు 6 కి.మీ. వేగంతో చేరాడు. అయితే అతని సగటు వేగం గంటకు ఎంత? (గ్రూప్-2, 2008)

సమాధానం:

P నుంచి Qకు, Q నుంచి Pకి సమాన దూరం ఉంటుంది కాబట్టి ఆ రెండు వేగాల హరాత్మక మధ్యమమే సగటు వేగం అవుతుంది.

$\therefore$ సగటు వేగం = $\frac{2\times3\times6}{3+6}$

$\frac{36}{9} = 4$

$\therefore$ సగటు వేగం గంటకు 4 కి.మీ.

ఉదాహరణ:

నీవు 20 KMPH వేగంతో A నుంచి Bకి, B నుంచి Aకి 60 KMPH వేగంతో ప్రయాణిస్తే నీ సరాసరి వేగం ఎంత? నీ మిత్రుడు X నుంచి Yకి స్థిరంగా 30 KMPH వేగంతో ప్రయాణించి అర్ధగంటలో చేరుకున్నాడు. Y నుంచి Zకి 40 KMPH వేగంతో ప్రయాణించి ఒకటిన్నర గంటల్లో చేరుకుంటే నీ మిత్రుడి సగటు వేగం ఎంత?

(గ్రూప్-1 మెయిన్స్ 2008)

సమాధానం:

నా సగటు వేగం = $\frac{2\times20\times60}{20+60}$

$= \frac{2400}{80} = 30$

$\therefore$ నా సగటు వేగం = 30 KMPH

దత్తాంశం నుంచి X, Yల మధ్య దూరం =

$30\times\frac{1}{2}$

$= 15$ కి.మీ.

Y, Zల మధ్య దూరం = $40 \times \frac{3}{2}$

= 60 కి.మీ.

X, Yల మధ్య దూరం, Y, Zల మధ్య దూరం సమానం కాదు కాబట్టి సగటు వేగం

$= \frac{\text{మొత్తం దూరం}}{\text{మొత్తం కాలం}}$

$= \frac{15+60}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}$

$= \frac{75}{2} = 37.5$

∴ నా మిత్రుడి సగటు వేగం =

37.5 KMPH

ఉదాహరణ:

నాలుగు వేర్వేరు నెలల్లో లీటరు పాల ధర రు. 18, రు. 20, రు. 22, రు. 25గా ఉంది. ఒక వ్యక్తి ఈ నాలుగు నెలల్లోనూ పాల కొనుగోలుపై సమానంగా ఖర్చు చేస్తే లీటరు పాల సగటు ధర ఎంత?

(సివిల్ సర్వీసెస్-మెయిన్స్, 2004)

సమాధానం:

నాలుగు నెలల్లోనూ పెట్టుబడి/ఖర్చు సమానంగా ఉంది కాబట్టి ఆయా ధరల హరాత్మక మధ్యమమే సగటు ధర అవుతుంది.

∴ సగటు ధర =

$\frac{4}{\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\frac{1}{25}}$

$= \frac{4}{\frac{550+495+450+396}{9900}}$

$= \frac{4 \times 9900}{1891}$

= 20.9413

∴ లీటరు పాల సగటు ధర = రు. 20.94

గమనిక:

a, b, c, d అనే నాలుగు రాశుల హరాత్మక మధ్యమం = $\frac{4abcd}{abc + abd + acd + bcd}$ అనే సూత్రాన్ని కూడా పై సమస్యలో ఉపయోగించవచ్చు.

సగటు-4

'సగటు'కు సంబంధించిన కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణలు:

1. ఒక పాఠశాలలోని 50 మంది విద్యార్థులను A, B, C అనే సెక్షన్‌లుగా విభజించారు. ఈ 50 మంది విద్యార్థులు ఒక పరీక్షకు హాజర య్యారు. A, B సెక్షన్ల విద్యార్థులను కలిపితే సగటు మార్కులు 52.5. అదే విధంగా A, C సెక్షన్లను కలిపితే సగటు 60 మార్కులు, B, C సెక్షన్లను కలిపితే సగటు 70 మార్కులు, మూడు సెక్షన్లూ కలిపితే సగటున 60 మార్కులు వచ్చాయి. అయితే 'C' సెక్షన్‌లోని విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?

   (A, B సెక్షన్లలో విద్యార్థుల సంఖ్య సమా నంగా ఉంది)

   సమాధానం:

   A, B సెక్షన్లలో ఒక్కో సెక్షన్‌లోని విద్యార్థుల సంఖ్య = 'x' అనుకొంటే...

   అప్పుడు 'C' సెక్షన్‌లోని విద్యార్థుల సంఖ్య = $50 - 2x$

   రాశుల మొత్తం = రాశుల సంఖ్య × సగటు అనే సూత్రాన్ని అనుసరించి A, B రెండు సెక్షన్లలోని విద్యార్థుల మార్కుల మొత్తం

   $= (x + x)\, 52.5$

   $= 105x$ ——— (1)

   ఇదే విధంగా, 'A', 'C' సెక్షన్ విద్యార్థుల మార్కుల మొత్తం = $(x + 50 - 2x)\, 60$

   $= (50 - x)\, 60$

   $= 3000 - 60x$ ——— (2)

   'B', 'C' సెక్షన్ విద్యార్థుల మార్కుల మొత్తం =

   $(x + 50 - 2x)\, 70$

   $= (50 - x)\, 70$

   $= 3500 - 70x$ ——— (3)

   A, B, C మూడు సెక్షన్ల విద్యార్థుల మార్కుల మొత్తం = 50×60

   $= 3000$ ——— (4)

   (1), (2), (3) & (4)ల నుంచి

$105x + 3000 - 60x + 3500 - 70x = 2 \times 3000$

$\Rightarrow 6500 - 25x = 6000$

$\Rightarrow 25x = 6500 - 6000 = 500$

$\Rightarrow x = \frac{500}{25} = 20$

ఇప్పుడు 'C' సెక్షన్‌లోని విద్యార్థుల సంఖ్య

$= 50 - 2x$

$= 50 - 2 \times 20$

$= 50 - 40 = 10$

∴ 'C' సెక్షన్‌లో '10' మంది విద్యార్థులు ఉన్నారు.

2. ఒక పరీక్షలో 55 మంది విద్యార్థుల సగటు మార్కులు 88. మొదటి నాలుగు ర్యాంకులు పొందిన విద్యార్థులను మినహాయిస్తే సగటు మార్కులు '4' తగ్గుతాయి. రెండో ర్యాంకు పొందిన విద్యార్థికి 133 మార్కులు వచ్చాయి. మార్కులు అన్నీ పూర్ణాంకాలుగానే ఉన్నాయి. ఏ ఇద్దరు విద్యార్థులకూ సమాన మార్కులు రాలేదు. అయితే మొదటి ర్యాంకు సాధించిన విద్యార్థికి కనిష్టంగా ఎన్ని మార్కులు వచ్చే అవకాశం ఉంది?

సమాధానం:

రాశుల మొత్తం = రాశుల సంఖ్య × సగటు అనే సూత్రాన్ని అనుసరించి, 55 మంది విద్యార్థుల మార్కుల మొత్తం = 55×88

$= 4,840$ —— (1)

మొదటి 4 ర్యాంకులు పొందిన వారిని మినహాయిస్తే, మిగిలిన 51 మంది విద్యార్థుల సగటు మార్కులు = $88 - 4 = 84$

ఈ 51 మంది విద్యార్థుల మార్కుల మొత్తం =

51×84

$= 4,284$ —— (2)

(1), (2)ల నుంచి మొదటి '4' ర్యాంకులు పొందిన విద్యార్థుల మార్కుల మొత్తం =

$4,840 - 4,284 = 556$

దత్తాంశం ప్రకారం మూడు, నాలుగు ర్యాంకులు పొందిన విద్యార్థులకు గరిష్ట మార్కులు వరుసగా 132, 131 వచ్చే అవకాశం ఉంది.

∴ మొదటి ర్యాంకు పొందిన విద్యార్థికి రావడానికి అవకాశం ఉన్న కనిష్ట మార్కులు

$= 556 - (133 + 132 + 131)$

$= 556 - 396 = 160$

3. మూడు సంఖ్యల్లో మొదటి సంఖ్య రెండో సంఖ్యకు రెట్టింపు. మూడో సంఖ్య రెండో సంఖ్యలో సగం. మూడింటి అంకమధ్యమం 42 అయితే ఆ మూడు సంఖ్యల గుణ మధ్య మం, హరాత్మక మధ్యమాలను కనుగొనండి.

సమాధానం:

మూడో సంఖ్య = 'x' అనుకుంటే....

అప్పుడు రెండో సంఖ్య = $2x$,

మొదటి సంఖ్య = $4x$ అవుతుంది.

అంకమధ్యమం = $\frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$

అనే సూత్రాన్ని అనుసరించి, ఈ మూడు సంఖ్యల అంకమ ధ్యమం

$= \frac{4x + 2x + x}{3}$

$= \frac{7x}{3}$

దత్తాంశం ప్రకారం

$\frac{7x}{3} = 42$

$\Rightarrow x = 42 \times \frac{3}{7}$

$= 18$

$\therefore$ మూడు సంఖ్యలు = $4\times18,\ 2\times18,\ 18$

$= 72,\ 36,\ 18$ అవుతాయి.

a, b, c,ల గుణ మధ్యమం

$= (a \times b \times c)^{\frac{1}{3}}.$

అనే సూత్రాన్ని అనుసరించి,

ఈ మూడు సంఖ్యల గుణ మధ్యమం

$= (72 \times 36 \times 18)^{\frac{1}{3}}$

$= (2 \times 36 \times 36 \times 18)^{\frac{1}{3}}$

$= (36 \times 36 \times 36)^{\frac{1}{3}}$

$= 36$

$\therefore$ గుణ మధ్యమం = 36

a, b, cల హరాత్మక మధ్యమం = $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ అనే సూత్రాన్ని

అనుసరించి, పై మూడు సంఖ్యల హరాత్మక మధ్యమం

$$=\frac{3}{\frac{1}{72}+\frac{1}{36}+\frac{1}{18}}$$

$$=\frac{3}{\frac{1+2+4}{72}}$$

$$=3\times\frac{72}{7}$$

$$=\frac{216}{7} = 30.857$$

$\therefore$ హరాత్మక మధ్యమం = 30.857

పై ఉదాహరణ నుంచి మనం కింది విష యాన్ని గమనించవచ్చు.

అంకమధ్యమం $\geq$ గుణమధ్యమం $\geq$ హరా త్మక మధ్యమం.

4. ఒక వసతి గృహంలో 100 మంది బాలురు ఉన్నారు. 20 మంది బాలురు అదనంగా చేరగా ఒక్క రోజుకు వసతి గృహ నిర్వహణకు అయ్యే ఖర్చు రూ. 400 పెరిగింది, ఒక్కో బాలుడికి రోజుకు సగటున అయ్యే ఖర్చు రూ. 2.50 తగ్గింది. అయితే ప్రస్తుతం ఆ వసతి గృహ నిర్వహణకు నెలకు అయ్యే మొత్తం ఖర్చు ఎంత?

సమాధానం:

20 మంది బాలురు చేరక ముందు ఒక్కో బాలుడికి సగటున ఒక్క రోజుకు వసతి గృహ నిర్వహణకు అయ్యే ఖర్చు = రూ. x అను కుంటే

అప్పుడు 100 మంది బాలురకు సగటున ఒక్క రోజుకు అయ్యే ఖర్చు = రూ. $100x$.

దత్తాంశం ప్రకారం, 20 మంది అదనంగా చేరిన తర్వాత ఒక్క రోజు వసతి గృహ నిర్వ హణకు అయ్యే ఖర్చు =

రూ. $100x + 400$ —— (1)

వసతి గృహంలోని బాలుర సంఖ్య

= 100 + 20

= 120

ఒక్కో బాలుడికి సగటున ఒక్కో రోజుకు అయ్యే ఖర్చు =

రూ. $\frac{100x+400}{120}$

= రూ. $\frac{100x}{120}+\frac{400}{120}$

= రూ. $\frac{5x}{6}+\frac{10}{3}$

దత్తాంశం ప్రకారం

$\frac{5x}{6}+\frac{10}{3}= x-2.5 = x-\frac{5}{2}$

$\Rightarrow \frac{10}{3}+\frac{5}{2}= x-\frac{5x}{6}$

$\Rightarrow \frac{x}{6}=\frac{20+15}{6}=\frac{35}{6}$

$\Rightarrow x = 35.$

(1) నుంచి, ప్రస్తుతం వసతి గృహ నిర్వహ ణకు ఒక్క రోజుకు అయ్యే ఖర్చు =

$100x + 400$

$= 100 \times 35 + 400$

$= 3,500 + 400$

= రూ. 3,900

$\therefore$ ప్రస్తుతం వసతి గృహ నిర్వహణకు నెలకు అయ్యే ఖర్చు

= రూ. $3,900 \times 30$

= రూ. 1,17,000.

సగటు-5

సగటులు – కొన్ని ధర్మాలు

అంకమధ్యమం, గుణమధ్యమం, హరాత్మక మధ్యమాలకు సంబంధించి కొన్ని ధర్మాల గురించి చర్చిద్దాం.

అంకమధ్యమం:

$x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n$ల అంకమధ్యమం = $\bar{x}$ అనుకుంటే అప్పుడు

i) $x_1+k, x_2+k, x_3+k, \ldots . x_n+k$ల అంకమధ్యమం = $\bar{x}+k$ అంటే దత్తాంశంలోని ప్రతి రాశికి ఒక స్థిరసంఖ్యను కలిపితే వాటి అంకమధ్యమానికి కూడా అదే స్థిరసంఖ్యను కలపాలి.

ii) $x_1-k, x_2-k, x_3-k, \ldots . x_n-k$ల అంకమధ్యమం = $\bar{x}-k$

iii) $kx_1, kx_2, kx_3, \ldots . kx_n$ల అంకమధ్యమం = $k\bar{x}$

iv) $\frac{x_1}{k}, \frac{x_2}{k}, \frac{x_3}{k}, \ldots \ldots, \frac{x_n}{k}$ ల అంకమధ్యమం = $\frac{\bar{x}}{k}$

v) దత్తాంశంలోని ప్రతి రాశి k శాతం పెరిగినా–లేదా తగ్గినా వాటి అంకమధ్యమం కూడా k శాతం పెరుగుతుంది లేదా తగ్గుతుంది.

ఉదా: ఒక కంపెనీలో పని చేసే కొద్దిమంది ఉద్యోగుల సగటు జీతం ₹ 8000 అనుకోండి. అప్పుడు

i) ప్రతి ఉద్యోగి వేతనం రూ. 500 పెరిగిందనుకుంటే, మారిన సగటు వేతనం = 8000 + 500 = ₹ 8,500.

ii) ప్రతి ఉద్యోగి వేతనం ₹ 300 తగ్గిందనుకుంటే, అప్పుడు మారిన సగటు వేతనం = 8000 – 300 = ₹ 7700.

iii) ప్రతి ఉద్యోగి వేతనం రెట్టింపైందనుకుంటే, అప్పుడు మారిన సగటు వేతనం = 2 × 8000 = ₹ 16,000.

iv) ప్రతి ఉద్యోగి వేతనం సగమైందనుకుంటే, అప్పుడు మారిన సగటు వేతనం = 8000/2 = ₹ 4,000.

v) ప్రతి ఉద్యోగి వేతనం 10 శాతం పెరిగిం దనుకుంటే, అప్పుడు మారిన సగటు వేతనం = 8000×(100+10)/100 = ₹ 8,800.

గుణమధ్యమం:

$x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n$ల గుణమధ్యమం =

$\bar{x}$ అనుకుంటే,

i) $kx_1, kx_2, kx_3, ...kx_n$ ల గుణమధ్యమం = $k\bar{x}$

అంటే దత్తాంశంలోని ప్రతి రాశిని ఒక స్థిరసంఖ్యతో గుణిస్తే, వాటి గుణమధ్యమాన్ని కూడా అదే స్థిరసంఖ్యతో గుణించాలి.

ii) $\frac{x_1}{k}, \frac{x_2}{k}, \frac{x_3}{k}, ..., \frac{x_n}{k}$ ల గుణమధ్యమం = $\frac{\bar{x}}{k}$

iii) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3} .... \frac{1}{x_n}$ ల గుణమధ్యమం = $\frac{1}{\bar{x}}$

iv) $x_1^k, x_2^k, x_3^k .... x_n^k$ ల గుణమధ్యమం = $(\bar{x})^k$

హరాత్మకమధ్యమం:

$x_1, x_2, x_3, ...x_4$ ల హరాత్మక మధ్యమం = $\bar{x}$ అనుకుంటే, అప్పుడు

i) $kx_1, kx_2, kx_3, ...kx_n$ ల హరాత్మకమధ్యమం = $k\bar{x}$

ii) $\frac{x_1}{k}, \frac{x_2}{k}, \frac{x_3}{k}, ..., \frac{x_n}{k}$ ల

హరాత్మక మధ్యమం = $\frac{\bar{x}}{k}$

దత్తాంశంలోని రాశుల ప్రమాణాల ప్రభావం ఆయా రకాల సగటులపై ఎలా ఉంటుందో ఉదాహరణల ద్వారా చర్చిద్దాం.

ఉదా: ఒక తరగతిలోని విద్యార్థుల బరువులను కిలోల్లో, గ్రాముల్లో నమోదు చేశారు. ఐతే బరువుల ప్రమాణాల ప్రభావం అంకమధ్యమం, గుణమధ్యమం, హరాత్మక మధ్యమాలపై ఉంటుందో, లేదో కనుక్కోండి.

సమాధానం: తరగతిలోని విద్యార్థుల బరువులను కిలోలతో నమోదు చేస్తే ఈ విధంగా ఉన్నాయనుకోండి. $w_1, w_2, w_3.....w_n$ కిలోలు

ఈ బరువుల అంకమధ్యమం= బరువుల మొత్తం/బరువుల సంఖ్య

$= w_1+w_2+w_3+....w_n / n$ కిలోలు

$= w_a$ కిలోలు అనుకోండి

$= 1000\ w_a$ గ్రాములు ....(1)

($\because$ 1 కిలో = 1000 గ్రాములు)

ఈ బరువుల గుణమధ్యమం=

(బరువుల లబ్దం)$^{1/\text{బరువుల సంఖ్య}}$

$= (w_1.w_2.w_3....w_n)^{1/n}$

కిలోలు=w_g కిలోలు అనుకోండి

$= 1000\ w_g$ గ్రాములు ....(2)

ఈ బరువుల హరాత్మక మధ్యమం =

బరువుల సంఖ్య/బరువుల వ్యుత్క్రమాల మొత్తం

$$= \frac{n}{\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+\frac{1}{w_3}+......+\frac{1}{w_n}}$$

కిలోలు = w_n కిలోలు అనుకోండి.

$= 1000\ w_n$ గ్రాములు ....(3)

ఇప్పుడు విద్యార్థుల బరువులను గ్రాముల్లో నమోదు చేస్తే ఈ విధంగా ఉంటాయి. $1000w_1$, $1000w_2$, $1000w_3$,....$1000w_n$ గ్రాములు.

ఈ బరువుల అంకమధ్యమం=$1000w_1+ \quad 1000w_2+\ 1000w_3+\ ....1000w_n/n$ గ్రా.

$1000\times (w_1\times w_2\times w_3\times ....w_n)$ గ్రా.

= $1000w_a$ గ్రాములు ....(4)

(1) 4 (4) ల నుంచి రెండు సందర్భాల్లో బరువుల అంకమధ్యమం సమానంగా వచ్చింది. అంటే బరువుల ప్రమాణాల ప్రభావం అంకమధ్యమంపై ఉండదని చెప్పవచ్చు. ఈ బరువుల గుణమధ్యమం

=$(1000w_1\times 1000w_2\times 1000w_3$

$\times ...w_n)^{1/n}$ గ్రా.

=$(1000^n\times w_1\times w_2\times w_3\times ...w_n)^{1/n}$గ్రా.

=$1000\times (w_1\times w_2\times w_3\times ...w_n)^{1/n}$ గ్రాములు.

= $1000\ w_g$ గ్రాములు..... (5)

(2), (5)ల నుంచి బరువుల ప్రమాణాల ప్రభావం గుణమధ్యమంపై కూడా ఉండదని చెప్పొచ్చు.

ఈ బరువుల హరాత్మక మధ్యమం

$$= \frac{n}{\frac{1}{1000w_1}+\frac{1}{1000w_2}+\frac{1}{1000w_3}+......+\frac{1}{1000w_n}}$$ గ్రాములు

$$= 1000\times\frac{n}{\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+\frac{1}{w_3}+......+\frac{1}{w_n}}$$ గ్రాములు

= 1000 w_n గ్రాములు..... (6)

(3), (6)ల నుంచి బరువుల ప్రమాణాల ప్రభావం హరాత్మక మధ్యమంపై కూడా ఉండదని చెప్పొచ్చు.

ఉదా: ఒక థర్మామీటర్‌లో నమోదైన ఉష్ణోగ్రతల అంకమధ్యమాన్ని కనుక్కోవాలంటే, ఆ ఉష్ణోగ్రతలు ఏ ప్రమాణంలో (సెంటిగ్రేడ్లు లేదా ఫారన్‌హీట్లు) ఉన్నా, వాటి ప్రభావం ఉండదు. అదే గుణమధ్యమాన్ని గణించేటప్పుడు ఉష్ణోగ్రతల ప్రమాణాల ప్రభావం ఉంటుందని నిరూపించండి?

సమాధానం: మొదట conversion సూత్రాన్ని పరిశీలిద్దాం. డిగ్రీ సెంటిగ్రేడ్‌ల్లో ఉన్న ఉష్ణోగ్రతను డిగ్రీ ఫారెన్‌హీట్‌లలోకి మార్చాలంటే సూత్రం:

$$F = 32 + \frac{9}{5} \times C$$

మొదట ఉష్ణోగ్రతలను డిగ్రీ సెంటీగ్రేడ్‌ల్లో నమోదు చేస్తే ఈ విధంగా ఉంటాయి.

$C_1, C_2, C_3 .... C_n$

వీటి అంకమధ్యమం=

$C_1+C_2+C_{3+}....+C_n/n$

= $\bar{C}$ డిగ్రీ సెంటిగ్రేడ్లు అనుకోండి

$$= 32 + \frac{9}{5} \times \bar{C}$$

డిగ్రీ ఫారెన్‌హీట్లు ....(1).

వీటి గుణమధ్యమం = $(C_1.C_2.C_3.....C_n)^{1/n}$

C_g డిగ్రీ సెంటిగ్రేడ్లు అనుకొనండి.

$$= 32 + \frac{9}{5} \times C_g$$

డిగ్రీ ఫారెన్‌హీట్లు ......(2)

ఇప్పుడు ఉష్ణోగ్రతలను డిగ్రీఫారెన్ హీట్లలోకి (°F) నమోదు చేస్తే, వీటి అంకమధ్యమం

$$= \frac{32 + \frac{9}{5} \times C_1, 32 + \frac{9}{5} C_2, 32 + \frac{9}{5} C_3 ...... 32 + \frac{9}{5} C_n}{n}$$

$$= \frac{32n + \frac{9}{5}(C_1 + C_2 + C_3 ...... + C_n)}{n}$$

$$= 32 + \frac{9}{5} \times \bar{C}$$

డిగ్రీ ఫారెన్‌హీట్లు ....(3)

(1), (3)ల నుంచి ఉష్ణోగ్రతల ప్రమాణాల ప్రభావం అంకమధ్యమంపై ఉండదని చెప్పొచ్చు. ఎందుకంటే (1), (3)ల్లో వచ్చిన అంకమధ్యమాలు రెండూ సమానం ఇప్పుడు పై ఉష్ణోగ్రతల

గుణమధ్యమం

$$=\left[\left(32+\frac{9}{5}C_1\right)\times\left(32+\frac{9}{5}C_2\right)\times....\times\left(32+\frac{9}{5}C_n\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

డిగ్రీ ఫారెన్‌హీట్లు ....(4)

(2), (4)ల్లో వచ్చిన ఉష్ణోగ్రతల గుణమధ్యమాలు రెండూ సమానం కావు. కాబట్టి ఉష్ణోగ్రతల ప్రమాణాల ప్రభావం గుణమధ్యమంపై ఉంటుందని చెప్పొచ్చు.

నోట్: ఒక రాశిని ఒక ప్రమాణం నుంచి మరో ప్రమాణానికి మార్చడానికి ఉపయోగించే con version సూత్రంలో కేవలం గుణకారాలు (×), భాగాహారాలు (÷) మాత్రమే ఉంటే ప్రమాణాల ప్రభావం అంకమధ్యమం, గుణమధ్యమం, హరాత్మక మధ్యమాలు వేటిపైనా ఉండదు.

ఉదా: 1) మీటర్లు, సెంటీమీటర్లు: 4 మీ॥ = 4×100 సెం.మీ.

2) అడుగులు, అంగుళాలు: 5 అడుగులు = 5×12 అంగుళాలు

ఒక వేళ conversion సూత్రంలో గుణకారాలు, భాగాహారాలతో పాటు కూడికలు (+), తీసివేతలు (−) కూడా ఉంటే ప్రమాణాల ప్రభావం కేవలం అంకమధ్యమంపై మాత్రమే ఉండదు. గుణమధ్యమం, హరాత్మక మధ్యమాలపై ఆ ప్రమాణాల ప్రభావం ఉంటుంది.

ఉదా: డిగ్రీ ఫారెన్ హీట్లు, డిగ్రీ సెంటిగ్రేడ్లు.

$$F=32+\frac{9}{5}\times C,$$

ఈ conversion సూత్రంలో కూడిక, గుణకారం, భాగహారం ఉన్నాయి. కాబట్టి ప్రమాణాల ప్రభావం గుణమధ్యమం, హరాత్మక మధ్యమం రెండింటిపైనా ఉంటుంది.

ఉదా: ఒక వసతి గృహంలో 100 మంది బాలురు ఉన్నారు. 20 మంది బాలురు వసతి గృహంలో అదనంగా చేరగా వసతి గృహం నిర్వహణకు ఒక రోజుకు అయ్యే ఖర్చు ₹ 400 పెరిగింది. ఒక్కో బాలుడికి ఒక్కో రోజుకి అయ్యే సగటు ఖర్చు ₹ 2.50 తగ్గింది. ఐతే ప్రస్తుతం ఆ వసతి గృహ నిర్వహణకు ఒక నెలకు అయ్యే మొత్తం ఖర్చు ఎంత?

సమాధానం: వసతి గృహంలో 100 మంది బాలురు ఉన్నప్పుడు ఒక్కో బాలుడికి ఒక్కో రోజుకి అయ్యే సగటు ఖర్చు = ₹ x అనుకుందాం. అప్పుడు ఒక రోజుకు వసతి గృహ నిర్వహణకు అయ్యే మొత్తం ఖర్చు = ₹ 100x

దత్తాంశం ప్రకారం, 20 మంది అదనంగా చేరిన తర్వాత వసతిగృహ నిర్వహణకు రోజుకి అయ్యే ఖర్చు ₹100x +400, అదే విధంగా ఒక్కో విద్యార్థికి ఒక్కో రోజుకి అయ్యే సగటు ఖర్చు = ₹ x–2.50 .... (1)

⟹ 120 మంది బాలురకు ఒక రోజుకు మొత్తం ఖర్చు = సగటు ఖర్చు × విద్యార్థుల సంఖ్య

$= (x - 2.50)\times 120 = 120x - 300$

కానీ $120x - 300 = 100x + 400$ కావాలి.

$\Rightarrow 120x - 100x = 400 + 300$

$\Rightarrow 20x = 700 \quad \Rightarrow x = 35$

ఇప్పుడు (1) నుంచి 120 మంది ఉన్నప్పుడు ఒక్కో విద్యార్థికి ఒక్కో రోజుకు అయ్యే సగటు ఖర్చు = 35 – 2.50 = ₹ 32.50

$\Rightarrow$ వసతిగృహం నిర్వహణకు ఒక నెలకు అయ్యే మొత్తం ఖర్చు

= సగటు ఖర్చు × విద్యార్థుల సంఖ్య × రోజుల సంఖ్య

= 32.50 × 120 × 30 = ₹ 1,17,000

∴ ప్రస్తుతం వసతిగృహ నిర్వహణకు ఒక నెలకు అయ్యే మొత్తం ఖర్చు = ₹ 1,17,000

సగటు మార్పు శాతం

గత పాఠ్యాంశంలో మార్పు శాతానికి సంబంధిం చిన మౌలిక అంశాలు, సూత్రాలు, ఉదాహరణలు చర్చించాం. ఇందులో సగటు మార్పు శాతం లేదా సగటు మార్పు రేటు గురించి చర్చిద్దాం. జనాభాలోని సగటు పెరుగుదల రేటు, యంత్రం విలువ సగటు తరుగుదల రేటు, ఒక ఆర్థిక వ్యవస్థ విలువ సగటు వృద్ధిరేటు.. వంటి గణాంకాలను కనుగొనడం అనేక పర్యాయాలు మనకు అవసరం అవుతుంటాయి. ఈ అంశంపై గత 2008లో జరిగిన గ్రూప్-I మెయిన్స్ పరీక్షలో పది మార్కుల ప్రశ్న వచ్చింది. కాబట్టి ఇది గ్రూప్-I పరీక్షలు రాయబోయే అభ్యర్థులకు ఎంతో ప్రధానం.

గుణ మధ్యమం (Geometric Mean):

గుణ మధ్యమానికి ప్రధానంగా కింది ఉపయోగా లను చూస్తాం.

- ఆయా సంవత్సరాల్లో ఒక రాశిలో నమోదైన మార్పు శాతాల (మార్పు రేట్ల) సగటును కనుగొనడం.
- వివిధ నిష్పత్తుల సగటు నిష్పత్తిని కనుగొనడం.
- గుణ మధ్యమాన్ని ఉపయోగించి సగటు మార్పు శాతాన్ని మూడు విధాలుగా కనుక్కో వచ్చు. ఈ మూడు విధాల్లో ఏ విధంగా చేసినా ఒకే సమాధానం వస్తుంది.

మొదటి పద్ధతి:

ఒక రాశి తొలి విలువ 'P_o' అనుకొంటే...

'n' సంవత్సరాల తర్వాత ఆ రాశి విలువ 'P_n' అనుకుంటే...

అప్పుడు ఆ రాశిలో నమోదైన వార్షిక సగటు మార్పు శాతం 'R' అనుకుంటే.. అప్పుడు

$$P_n = P_o\left[1+\frac{R}{100}\right]^n$$

అనే సూత్రం ద్వారా ఒక సమీకరణాన్ని ఏర్పరిచి, దాన్ని సాధించడం ద్వారా 'R' విలువను కనుక్కోవచ్చు.

గమనిక: మార్పు అంటే పెరుగుదల లేదా తరుగు దలల్లో ఏదైనా కావచ్చు. రాశిలో పెరుగుదల నమోదైతే

$$P_n = P_o\left[1+\frac{R}{100}\right]^n$$

అనే సూత్రం ఉపయోగించవచ్చు.

ఒకవేళ రాశిలో తరుగుదల నమోదైతే

$$P_n = P_o\left[1-\frac{R}{100}\right]^n$$

అనే సూత్రాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

రెండో పద్ధతి:

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n$ అనే 'n' రాశుల గుణ మధ్యమం = $[x_1.x_2.x_3.....x_n]^{\frac{1}{n}}$

అనే సూత్రాన్ని ఉపయోగించి సగటు మార్పు శాతాన్ని కనుక్కోవచ్చు.

మూడో పద్ధతి:

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ అనే 'n' రాశుల గుణ మధ్యమం =

Anti log $\left[\frac{\sum \log x}{n}\right]$ అవుతుంది.

ఇక్కడ...

$\Sigma \mathrm{Log}x = \mathrm{Log}x_1 + \mathrm{Log}x_2 + \ldots\ldots\ldots + \mathrm{Log}x_n$.

అంటే $\Sigma \mathrm{Log}x$ అనేది ఆయా అంశాల సంవర్గ మానాల సంకలనం. ఈ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి కూడా సగటు మార్పు శాతాన్ని కనుగొనవచ్చు.

ముఖ్య గమనిక: పై మూడు పద్ధతుల్లో ఏ పద్ధతిని ఉపయోగిం చాలన్నా కూడా "Scientific calculator"ని ఉపయోగించడం తప్పనిసరి. కాబట్టి అభ్యర్థులు calculatorను నేర్పుగా ఉపయోగిం చడం నేర్చుకోవాలి.

ఉదాహరణ: 1981 జనాభా లెక్కల ప్రకారం ఒక రాష్ట్ర జనాభా 70 మిలియన్లు. 1991 జనాభా లెక్కల ప్రకారం ఆ రాష్ట్ర జనాభా 90 మిలియన్లకు పెరిగింది. అయితే ఈ పదేళ్ల కాలంలో ఆ రాష్ట్ర జనాభాలోని వార్షిక సగటు పెరుగుదల రేటు ఎంత?

సమాధానం: ఇక్కడ ఒక రాష్ట్ర జనాభా తొలి విలువ, పదేళ్ల అనంతరం దాని విలువ ఇచ్చారు. కాబట్టి మనం మొదటి పద్ధతిని ఆశ్రయించవచ్చు.

దత్తాంశం నుంచి...

P_o = 70 మిలియన్లు

P_n = 90 మిలియన్లు

n = 10 సంవత్సరాలు

$$P_n = P_o\left[1+\frac{R}{100}\right]^n$$

ఇందులో 'R' జనాభాలోని వార్షిక సగటు పెరుగుదల రేటును సూచిస్తుంది.

$$\Rightarrow 90 = 70\left[1+\frac{R}{100}\right]^{10}$$

$$\Rightarrow \left[1+\frac{R}{100}\right]^{10} = \frac{90}{70} = 1.285$$

$$\Rightarrow 1+\frac{R}{100} = (1.285)^{\frac{1}{10}} = (1.285)^{0.1}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{R}{100} = 1.025$$

$$\Rightarrow \frac{R}{100} = 1.025 - 1 = 0.025$$

$$\Rightarrow R = 0.025 \times 100 = 2.5$$

∴ రాష్ట్ర జనాభాలో వార్షిక సగటు పెరుగుదల రేటు = 2.5%

ఉదాహరణ: ఒక భవనం విలువ క్రమంగా తగ్గుతూ ఉంది. ఈ తగ్గుదల మొదటి ఏడాది 5 శాతం, రెండో ఏడాది 10 శాతం, మూడో ఏడాది 15 శాతం, తర్వాత రెండేళ్లలో 20 శాతం చొప్పున ఉంది. అయితే ఈ ఐదేళ్ల కాలంలో భవనం వార్షిక సగటు తగ్గుదల రేటును కనుగొనండి.

సమాధానం: ఈ సమస్యను మూడు పద్ధతుల్లో ఏ పద్ధతి ద్వారా అయినా సాధించవచ్చు.

మొదటి పద్ధతి:

సాధారణత కోల్పోకుండా భవనం విలువ ప్రారంభంలో 100 యూనిట్లు అనుకొంటే.....

ఇప్పుడు దత్తాంశం ప్రకారం 5 ఏళ్ల తర్వాత ఆ భవనం విలువ

$$= 100 \times \left(\frac{100-5}{100}\right) \times \frac{(100-10)}{100}$$

$$\times \frac{(100-15)}{100} \times \frac{(100-20)}{100} \times \frac{(100-20)}{100}$$

$$= 95 \times \frac{90}{100} \times \frac{85}{100} \times \frac{80}{100} \times \frac{80}{100}$$

= 46.512 యూనిట్లు

ఇప్పుడు భవనం తొలి విలువ $P_o = 100$,

5 ఏళ్ల తర్వాత దాని విలువ = 46.512

$$\therefore \; P_n = P_o\left[1-\frac{R}{100}\right]^n$$

అనే సూత్రం ప్రకారం..

$$46.512 = 100\left[1-\frac{R}{100}\right]^5$$

$$\Rightarrow \left[1-\frac{R}{100}\right]^5 = \frac{46.512}{100} = 0.46512$$

$$\Rightarrow \left[1-\frac{R}{100}\right] = (0.46512)^{1/5} = 0.8580$$

$$\Rightarrow \quad R = 14.2$$

∴ భవనం వార్షిక సగటు తగ్గుదల రేటు = 14.2%

రెండో పద్ధతి:

ప్రతి ఏడాది ప్రారంభంలో భవనం విలువ '100' యూనిట్లు అనుకొందాం. ఇప్పుడు భవనం విలువలు, తగ్గుదలను ఆయా సంవత్సరాల్లో పట్టికలో రాస్తే..

సం॥	ప్రారంభంలో భవనం విలువ	చివర్లో భవనం విలువ	భవనం విలువలోని తగ్గుదల శాతం
1	100	100–5 = 95	5
2	100	100–10 = 90	10
3	100	100–15 = 85	15
4	100	100–20 = 80	20
5	100	100–20 = 80	20

ప్రతి సంవత్సరం చివర్లో భవనం విలువలు– 95, 90, 85, 80, 80ల గుణ మధ్యమం

$$= (95 \times 90 \times 85 \times 80 \times 80)^{\frac{1}{5}}$$

$$= (4651200000)^{1/5} = 85.80$$

(ఈ అయిదు విలువల గుణ మధ్యమాన్ని కనుగొనడానికి మూడో పద్ధతిలోని సంవర్గమా నాలకు (Logarithm) సంబంధించిన సూత్రాన్ని కూడా వాడొచ్చు)

అంటే సగటున ప్రతి ఏడాది ప్రారంభంలో భవనం విలువ 100 యూనిట్లు అయితే సంవత్స రం చివర్లో దాని విలువ 85.80 యూనిట్లు అని తెలుస్తోంది.

∴ భవనం విలువలోని వార్షిక సగటు తగ్గుదల రేటు = 100 – 85.80 = 14.20%

ఉదాహరణ: ఒక యంత్రం విలువ మొదటి ఏడాది 40 శాతం, రెండో ఏడాది 25%, తర్వాత మూడేళ్లలో 10 శాతం మేరకు తగ్గితే ఐదేళ్లలో సరాసరి తగ్గుదల శాతం ఎంత? ఇక్కడ ప్రతి శాతం తగ్గుదల విలువ పైన గణించారు.

(ఏపీపీఎస్సీ, గ్రూప్–I, 2008)

సమాధానం: ఈ సమస్యను ఇది వరకు చర్చించిన మూడు పద్ధతుల్లో దేనినైనా ఉపయోగించి చెయ్యొచ్చు. రెండో పద్ధతి ప్రకారం చేసి చూద్దాం.

ప్రతి ఏడాది ప్రారంభంలో యంత్రం విలువ 100 యూనిట్లు అనుకొంటే.....

ఇప్పుడు ఆయా సంవత్సరాల్లో యంత్రం విలువలను, వాటి విలువలోని తగ్గుదలను ఒక పట్టికలో రాస్తే..

సం॥	ప్రారంభంలో యంత్రం విలువ	తగ్గుదల శాతం	సం॥చివర్లో యంత్రం విలువ
1	100	40	100–40 = 60
2	100	25	100–25 = 75
3	100	10	100–10 = 90
4	100	10	100–10 = 90
5	100	10	100–10 = 90

ప్రతి సంవత్సరం చివర్లో యంత్రం విలువలు అయితే 60, 75, 90, 90, 90ల గుణ మధ్యమం

$= (60 \times 75 \times 90 \times 90 \times 90)^{\frac{1}{5}} = 80.018$

అంటే సగటున ప్రతి ఏడాది ప్రారంభంలో యంత్రం విలువ 100 యూనిట్లు. అయితే సంవత్స రం చివర్లో దాని విలువ 80.018 యూనిట్లు అని తెలుస్తోంది.

$\therefore$ యంత్రం విలువలో వార్షిక సరాసరి తగ్గుదల రేటు = $100 - 80.018 = 19.982$

$\therefore$ సమాధానం : 19.982%

సగటు మార్పు రేటు

సగటు మార్పు రేటు లేదా సగటు మార్పు శాతం గురించి గత వ్యాసంలో కొంత వరకు చర్చించాం. ఈ శీర్షికలో ఈ అంశానికి సంబంధించి మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ: ఒక దేశ ఆర్థిక వ్యవస్థ విలువ మొదటి సంవత్సరంలో 2%, రెండో సంవత్సరంలో 2.5%, మూడో సంవత్సరంలో 3%, నాలుగో సంవత్స రంలో 4% చొప్పున పదో సంవత్సరంలో 10% పెరిగితే ఈ పది సంవత్సరాల కాలంలో దేశ ఆర్థిక వ్యవస్థ వార్షిక సగటు పెరుగుదల రేటును కనుక్కోండి (APPSC, Group-I, Model Paper, 2007)

సమాధానం: దత్తాంశం ప్రకారం మొదట ఐదు, ఆరు, ఏడు, ఎనిమిది, తొమ్మిది సంవత్సరాల్లో ఆర్థిక వ్యవస్థ విలువ వరుసగా 5%, 6%, 7%, 8%, 9% చొప్పున పెరిగిందని భావించాలి.

ఈ పది సంవత్సరాల కాలంలో ప్రతి సంవ త్సరం ప్రారంభంలో దేశ ఆర్థిక వ్యవస్థ విలువ 100 యూనిట్లు అనుకుందాం. ఇప్పుడు ఇచ్చిన దత్తాంశాన్నంతా పట్టికలో పొందుపర్చాలి(కింది పట్టికను పరిశీలించండి).

సం॥	సం॥ప్రారంభంలో ఆర్థిక వ్యవస్థ విలువ	పెరుగుదల శాతం	సం॥ చివర ఆర్థిక ఆర్థిక వ్యవస్థ విలువ
1	100	2	100+2=102
2	100	2.5	100+2.5=102.5
3	100	3	100+3=103
4	100	4	100+4=104
5	100	5	100+5=105
6	100	6	100+6=106
7	100	7	100+7=107
8	100	8	100+8=108
9	100	9	100+9=109
10	100	10	100+10=110

పట్టికలో చివరి నిలువు వరుసలోని విలువల గుణమధ్యమం

$= (102 \times 102.5 \times 103 \times 104 \times --- \times 109 \times 110)^{1/10} = 105.608$

అంటే సగటున ప్రతి సంవత్సరం ప్రారంభం లో దేశ ఆర్థిక వ్యవస్థ 100 యూనిట్లు ఉంటే సంవ త్సరం చివరన దాని విలువ 105.608 యూనిట్లు ఉంటుందన్నమాట.

$\therefore$ దేశ ఆర్థిక వ్యవస్థ వార్షిక సగటు పెరుగుదల రేటు = 105.608 – 100 = 5.608%

గమనిక: పై సమాధానంలో గుణమధ్యమాన్ని కనుక్కోవడానికి Logarithms (సంవర్గమానా లు) కూడా ఉపయోగపడతాయి. అయితే ఎలా చేసి నా ఒకే సమాధానం వస్తుంది. సంవర్గమానాలను ఎలా ఉపయోగించాలో ఈ కింది ఉదాహరణ ద్వారా చూద్దాం.

ఉదాహరణ: ఒక వస్తువు ధర ముందు సంవత్సరంతో పోల్చితే 1992లో 5% పెరిగింది. అలాగే 1993లో 8%, 1994లో 77% పెరిగింది. అయితే 1992 నుంచి 1994 వరకు వస్తువు ధరలో వార్షిక సగటు పెరుగుదల శాతం ఎంత?

సమాధానం: ప్రతి సంవత్సరం ప్రారంభంలో వస్తువు ధర 100 యూనిట్లు అనుకొని, ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని పట్టీకరిస్తే (పట్టిక 2 చూడండి)

పట్టిక – II

సం॥	ప్రారంభంలో వస్తువు ధర	చివరలో వస్తువు ధర (x_i)	**Log x_i**
1991-92	100	100+5=105	Log 105=2.0212
1992-93	100	100+8=108	Log 108=2.0334
1993-94	100	100+77=177	Log 177=2.2480
		$\Sigma \text{Log} x_i$= 6.3026	

వ్యక్తిగత శ్రేణి గుణమధ్యమం

$$= \text{Anti}\log\left[\frac{\sum \log x_i}{\text{n}}\right]$$

పైపట్టిక నుంచి $\Sigma \log x_i$= 6.3026, n = 3

∴ 105, 108, 177ల గుణమధ్యమం

$$= \text{Anti}\log\left[\frac{6.3026}{3}\right]$$

= Antilog [2.1009] = 126.2

అంటే ప్రతి సంవత్సరం ప్రారంభంలో సగటున వస్తువు ధర 100 యూనిట్లు ఉంటే సంవత్సరం చివర దాని ధర 126.2 యూనిట్లు ఉంటుందని అర్థం.

వస్తువు ధరలోని సగటు పెరుగుదల రేటు

= 126.2 – 100 = 26.2

∴ సమాధానం = 26.2%

గమనిక: ఈ సమస్యను సంవర్గమానాల (Logari- thms)ను ఉపయోగించకుండా మొదటి సమస్యను సాధించిన పద్ధతిలో సాధించవచ్చు.

కొన్ని సంవత్సరాల్లో పెరుగుదల రేటు, కొన్ని సంవత్సరాల్లో తగ్గుదల రేటు నమోదైతే సగటు పెరుగుదల/తగ్గుదల రేటు ఎలా కనుక్కోవాలో చూద్దాం.

ఉదాహరణ: ఒక స్థలం విలువ మొదటి సంవ త్సరంలో 10%, రెండో సంవత్సరంలో 20%, మూడో సంవత్సరంలో 15% పెరిగింది. తర్వాత రెండు సంవత్సరాల్లో స్థలం విలువ సగటున 19% చొప్పున తగ్గింది. అయితే ఈ ఐదు సంవత్సరాల్లో స్థలం విలువలోని వార్షిక సగటు పెరు గుదల/తగ్గుదల రేటును కనుక్కోండి?

సమాధానం: స్థలం విలువ కొన్ని సంవత్సరాల్లో పెరగడం, కొన్ని సంవత్సరాల్లో తగ్గడాన్ని గమనించవచ్చు. పెరుగుదలను ధనాత్మకంగా, తగ్గుదలను రుణాత్మకంగా భావించవచ్చు. (కింది పట్టిక పరిశీలించండి)

సం॥	సం॥ప్రారంభంలో స్థలం విలువ	స్థలం విలువలోని మార్పు శాతం	సం॥చివర స్థలం విలువ
1	100	+ 10	100 + 10 = 110
2	100	+ 20	100 + 20 = 120
3	100	+ 15	100 + 15 = 115
4	100	- 19	100 - 19 = 81
5	100	-19	100-19 = 81

110, 120, 115, 81, 81ల గుణమధ్యమం

$= (110 \times 120 \times 115 \times 81 \times 81)^{1/5}$

$= 99.9190$

పై గుణాత్మక మధ్యమం నుంచి ఈ ఐదు సంవత్సరాల కాలంలో స్థలం విలువ మొత్తం మీద తగ్గిందని చెప్పవచ్చు.

∴ స్థలం విలువలో సగటు తగ్గుదల శాతం

$= 100 - 99.9190 = 0.081\%$

ఉదాహరణ: ఒక కంపెనీ అమ్మకాల జ్యామితీయ పెరుగుదల రేటు మొదటి మూడు సంవత్సరాల్లో 25%, తర్వాత మూడు సంవత్సరాల్లో 40%గా నమోదైంది. అయితే ఈ ఆరు సంవత్సరాల్లో వార్షిక సగటు పెరుగుదల రేటు 65% అనే వాదన సరైందా? సమాధానాన్ని విశ్లేషించండి.

(2001, Civil Servi ces Mains)

సమాధానం: జ్యామితీయ పెరుగుదల రేటు (Geometric rate of growth)ను గుణమ ధ్యమం ఆధారంగా గణిస్తారు. కాబట్టి జ్యామితీయ పెరుగుదల రేటు అంటే వార్షిక సగటు పెరుగుదల రేటునే సూచిస్తుంది. ప్రతి సంవత్సరం ప్రారం భంలో కంపెనీ అమ్మకాల విలువ 100 యూనిట్లు అనుకుంటే ప్రతి సంతవ్సరం చివర్లో కంపెనీ అమ్మకాల విలువలు వరుసగా 100+25, 100+25, 100+25, 100+40, 100+40, 100+40 అవుతాయి. అంటే 125, 125, 125, 140, 140, 140 అవుతాయి. వీటి గుణమధ్యమం

$= (125 \times 125 \times 125 \times 140 \times 140 \times 140)^{1/6} = 132.2875$

∴ కంపెనీ అమ్మకాల వార్షిక సగటు పెరుగుదల శాతం = 132.2875 – 100

$= 32.2875$

కాబట్టి దత్తాంశంలో ఇచ్చిన 65% సగటు పెరుగుదల రేటు సరైంది కాదు.

ఉదాహరణ: ఒక కంపెనీ మూడు సంవత్సరాల్లో యాజమాన్యానికి, కార్మికులకు చెల్లించిన మొత్తం వార్షిక వేతనాలు కింది విధంగా ఉన్నాయి. అయితే మొత్తం వేతనాలు, యాజమాన్యానికి చెల్లించిన వేతనాల మధ్య వార్షిక సగటు నిష్పత్తి ఎంత?

సం॥	యాజమాన్యం (రూ.లలో)	కార్మికులు (రూ. లలో)
2006	61,000	1,35,000
2007	68,000	1,60,000
2008	72,000	1,80,000

సమాధానం: 2006 సంవత్సరంలో మొత్తం వేతనాలు, యాజమాన్యం వేతనాలకు

నిష్పత్తి= $\frac{61,000 + 1,35,000}{61,000} = 3.213$

అలాగే 2007లో నిష్పత్తి =

$\frac{68,000 + 1,60,000}{68,000} = 3.353$

అలాగే 2008లో నిష్పత్తి =

$\frac{72,000 + 1,80,000}{72,000} = 3.5$

సగటు నిష్పత్తి అంటే ఆయా నిష్పత్తుల గుణమధ్యమం

$\therefore$ సగటు నిష్పత్తి$=(3.213 \times 3.353 \times 3.5)^{1/3}$

$= (39.36)^{1/3} = 3.4018$

$\therefore$ వార్షిక సగటు నిష్పత్తి $= 3.4018$

సగటు-గుణమధ్యమం

గ్రూప్-I, మెయిన్స్ పేపర్-5, సివిల్ సర్వీసెస్ మెయిన్స్ తదితర పోటీ పరీక్షలకు గుణమధ్యమం అనే అంశం చాలా ప్రధానమైంది. గుణమధ్యమం కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాల్లో ఉపయోగించే గణిత సగటు.

నిర్వచనం: దత్తాంశంలోని 'n' రాశుల లబ్ధానికి చెందిన 'n'వ మూలకాన్నే గుణమధ్యమం అంటారు. x_1, x_2, x_3, ..., x_nల గుణమధ్యమం

$$= (x_1.x_2.x_3.......x_n)^{\frac{1}{n}}$$ (లేదా)

$$= \text{Antilog}\left[\frac{\text{Log}x_1 + \text{Log}x_2 + \text{Log}x_3 + ... + \text{Log}x_n}{n}\right]$$

$$= \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma \log x_i}{n}\right]$$

నోట్: గుణమధ్యమాన్ని గణించాలంటే కచ్చితంగా సైంటిఫిక్ కాలిక్యులేటర్ అవసరం

ఉదా: 2, 4, 8ల గుణమధ్యమం ఎంత?

సమాధానం: గుణమధ్యమం = $(2\times4\times8)^{1/3}$

$= (64)^{1/3} = 4$

ఉదా: 18, 8ల గుణమధ్యమం ఎంత?

సమాధానం: గుణమధ్యమం = $(18\times8)^{1/2}$

$= \sqrt{144} = 12$

విచ్ఛిన్న శ్రేణుల గుణమధ్యమం:

రాశులు(x_i)	పౌనఃపున్యాలు(f_i)
x_i	f_1
x_2	f_2
x_3	f_3
x_n	f_n

మొత్తం Σf_i

పై విచ్చిన్న శ్రేణి గుణమధ్యమం =

$$= \left(x_1^{f_1}.x_2^{f_2}.x_3^{f_3}.......x_n^{f_n}\right)^{\frac{1}{\Sigma f_i}}$$

$$= \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma f_i \text{Log} x_i}{\Sigma f_i}\right]$$ (లేదా)

$$= \text{AntiLog}\left[\frac{f_1 \text{Log} x_1 + f_2 \text{Log} x_2 + f_3 \text{Log} x_3 + ... + f_n \text{Log} x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n}\right]$$

భారిత గుణమధ్యమం:

ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని రాశులన్నీ సమప్రాధాన్యం లేకుండా, వివిధ భారాలు (Weights) కలిగి ఉంటే అప్పుడు భారిత గుణమధ్యమాన్ని (Weighted Geometric Mean) వాడాలి.

రాశులు(x_i) **భారాలు(W_i)**

x_1 W_1

x_2 W_2

x_3 W_3

x_n W_n

మొత్తం ΣW_i

నోట్: అన్ని రాశుల భారాలు సమానమైతే భారిత గుణమధ్యమం, సాధారణ గుణమధ్యమం సమానమవుతాయి.

ఈ దత్తాంశం గుణమధ్యమం

$$= \left(x_1^{W_1}.x_2^{W_2}.x_3^{W_3}........x_n^{W_n}\right)^{\frac{1}{\Sigma w_i}}$$

$$= \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma W_i \text{Log} x_i}{\Sigma W_i}\right]$$

గుణమధ్యమం ధర్మాలు:

1. దత్తాంశంలోని అన్ని రాశులపైనా ఆధారపడి ఉంటుంది.
2. ఏకవిలువకు కట్టుబడి ఉంటుంది.

3. బీజీయ వ్యవస్థకు అనుగుణంగా ఉంటుంది.

ఉదా: ఉమ్మడి గుణమధ్యమం.

మొదటి సమూహంలోని రాశుల సంఖ్య n_1, వాటి గుణమధ్యమం x_1, రెండో సమూహంలోని రాశుల సంఖ్య n_2, వాటి గుణమధ్యమం x_2 ఐతే ఆ రెండు సమూహాల ఉమ్మడి గుణమధ్యమం

$$= \text{Anti log}\left[\frac{n_1.\text{Log}x_1 + n_2.\text{Log}x_2}{n_1 + n_2}\right]$$

సమూహాల సంఖ్య రెండు కంటే ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు కూడా పై సూత్రాన్నే విస్తరించి రాసుకోవచ్చు.

4. అంకమధ్యమం ఎక్కువ విలువలున్న రాశులతో ఎక్కువ ప్రభావితమవుతుంది. కానీ గుణ మధ్యమం తక్కువ విలువలున్న రాశుల తో ఎక్కువ ప్రభావితమవుతుంది. అందుకే చిన్న రాశులకు అధిక ప్రాధాన్యం, పెద్ద రాశుల కు తక్కువ ప్రాధాన్యం ఇవ్వాల్సి వచ్చినప్పుడు సాధారణంగా గుణ మధ్యమాన్ని వాడుతారు. ఐతే గుణ మధ్యమంలోని కింది లోపాలు లేదా పరిమితులు కూడా దృష్టిలో ఉంచుకోవాలి.

   1) గుణ మధ్యమాన్ని గణన చేయడం, అవగాహన చేసుకోవడం కష్టం.

   2) దత్తాంశంలో కొన్ని రాశులు సున్నా లేదా రుణాత్మకమైతే ఆ దత్తాంశానికి సాధారణంగా గుణమధ్యమాన్ని నిర్వచించలేం.

గుణమధ్యమం–ఉపయోగాలు:

1. ఒక రాశిలో ఆయా సంవత్సరాల్లో వచ్చిన మార్పు శాతాలను ఇచ్చినప్పుడు వార్షిక సగటు మార్పు శాతాన్ని లేదా వార్షిక సగటు మార్పు రేటును కనుక్కోవడానికి గుణ మధ్య మాన్ని వాడుతారు. మార్పు శాతం అంటే పెరుగుదల లేదా తగ్గుదల శాతం కావొచ్చు.
2. వివిధ రాశుల్లో వచ్చిన మార్పు శాతాలను ఇచ్చినప్పుడు, అన్ని రాశులకు కలిపి సగటు మార్పు శాతాన్ని కనుక్కోవడానికి భారిత గుణ మధ్యమాన్ని వాడుతారు.
3. చక్రవడ్డీ రేటు (లేదా వార్షిక సగటు వడ్డీరేటు) కనుక్కోవడానికి గుణ మధ్యమం వాడుతారు.
4. వివిధ అంశాలకు సంబంధించిన సూచీ సంఖ్యలు, భారాలు ఇచ్చినప్పుడు అన్ని అంశాలకు కలిపి సూచీ సంఖ్య (ఇండెక్స్ నంబర్)ను నిర్మించడానికి భారిత గుణ మధ్యమాన్ని వాడుతారు.
5. సగటు నిష్పత్తి కనుక్కోవడానికి కూడా గుణ మధ్యమాన్నే వాడుతారు.

సగటు మార్పు శాతం – సూత్రాలు

i) ఒక రాశి 'n' వరుస సంవత్సరాల్లో వరుసగా R_1, R_2, R_3, ...R_n% చొప్పున పెరిగితే ఈ 'n' సంవత్సరాల్లో ఆ రాశి సగటు పెరుగుదల రేటు= $[(100+R_1)\ (100+R_2)\ (100+R_3)\ldots(100+R_n)]^{1/n} - 100$.

ii) ఒక రాశి 'n' వరుస సంవత్సరాల్లో వరుసగా $R_1, R_2, R_3....R_n\%$ చొప్పున తగ్గితే, ఈ 'n' సంవత్సరాల్లో ఆ రాశి సగటు తగ్గుదల శాతం = $100–[(100–R_1)\ (100–R_2)\ (100–R_3)...\ (100–R_n)]^{1/n}$

iii) ఒక రాశి మొదటి సంవత్సరం $R_1\%$ పెరిగి, రెండో సంవత్సరం $R_2\%$ తగ్గి, మూడో సంవత్సరం $R_3\%$ పెరిగితే, ఈ మూడేళ్లలో నమోదైన సగటు మార్పు శాతం=

$$[(100+R_1)(100–R_2)(100+R_3)]^{1/3}– 100$$

(**నోట్:** దీని విలువ '+' ve ఐతే పెరుగుదల శాతం నమోదైనట్లు, '–' ve ఐతే తగ్గుదల శాతం నమోదైనట్లు అర్థం)

మరో ముఖ్య గమనిక: ఇచ్చిన దత్తాంశానికి గుణమధ్యమాన్ని మూడు విధాలుగా కనుక్కోవచ్చు. అవి...

ఎ) సంవర్గమానాలు (Logarithms) ఉపయోగించి

బి) సంవర్గమానాలు ఉపయోగించకుండా ప్రాథమిక సూత్రం ఉపయోగించి

సి) చక్రవడ్డీ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి

పై మూడు విధాల్లో దేన్ని తీసుకున్నప్పటికీ సరైన సమాధానమే వస్తుంది.

ఉదా: ఒక దేశ ఆర్థికవ్యవస్థ వార్షిక వృద్ధి రేట్లు ఐదేళ్లలో వరుసగా 1.5%, 2.7%, 3.0%, 4.5%, 6.2%గా నమోదయ్యాయి. ఐతే ఈ ఐదేళ్లలో ఆ దేశ ఆర్థిక వ్యవస్థ సగటు వార్షిక వృద్ధి రేటు ఎంత?

సమాధానం: సగటు వార్షిక వృద్ధి రేటు గణించాలంటే గుణమధ్యమం సరైన గణాంకపు కొలత. ప్రతి సంతవ్సరం ఆర్థిక వ్యవస్థ విలువను 100 యూనిట్లు అనుకొని ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని పట్టికలో తీసుకుంటే...

సం.	వార్షిక వృద్ధి రేటు	సం. చివర ఆర్థిక వ్యవస్థ
1.	1.5	100+1.5 = 101.5
2.	2.7	100+2.7=102.7
3	3.0	100+3.0=103.0
4	4.5	100+4.5=104.5
5	6.2	100+6.2=106.2

గుణమధ్యమం = $(\text{రాశుల లబ్దం})^{1/\text{రాశుల సంఖ్య}}$ అనే ప్రాథమిక సూత్రం ప్రకారం ఆయా సంవత్సరాల చివర ఆర్థిక వ్యవస్థ విలువల గుణమధ్యమం= $(101.5\times102.7\times 103\times104.5\times106.2)^{1/5} = 103.5673$

అంటే ఆ దేశ ఆర్థిక వ్యవస్థ విలువ సగటున ప్రతి ఏటా 100 యూనిట్ల నుంచి 103.5673 యూనిట్లకు

పెరిగిందని అర్థం.

∴ వార్షిక సగటు పెరుగుదల రేటు = 103.56737–100 = 3.5673%

ఉదా: ఒక యంత్రం విలువ మొదటి సంవత్సరం 40%, రెండో ఏడాది 25%, తర్వాత మూడేళ్లలో 10% మేర తగితే ఈ ఐదేళ్లలో యంత్రం విలువలోని సరాసరి తగ్గుదల శాతం ఎంత?(ఇక్కడ ప్రతి శాతం తగ్గిన విలువపై గణించారు)

(ఏపీపీఎస్సీ, గ్రూప్-1, మెయిన్స్-2008)

సమాధానం: ఇప్పుడు ఈ సమస్యను లాగరిథమ్స్ ఉపయోగించి ఎలా సాధించవచ్చో చూద్దాం.

ప్రతి సంవత్సరం ప్రారంభంలో యంత్రం విలువను 100 యూనిట్లు అనుకొని ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని పట్టికలో రాస్తే

సం.	తగ్గుదల%	సం॥ చివర యంత్రం విలువ (x_i)	$\text{Log } x_i$
1	40	100-40=60	1.77815
2	25	100-25=75	1.87506
3.	10	100-10=90	1.95424
4.	10	100-10=90	1.95424
5.	10	100-10=90	1.95424
			$\Sigma \text{Log } x_i = 9.51594$

పై దత్తాంశం గుణమధ్యమం

$$= \text{Anti log}\left[\frac{\Sigma \text{Log } x_i}{n}\right]$$

'n' అంటే సంవత్సరాల సంఖ్య = 5

∴ గుణమధ్యమం=Antilog [9.51594/5]

= Antilog [1.90388] = 80.0180.

అంటే యంత్రం విలువ సగటున ప్రతి ఏటా 100 యూనిట్ల నుంచి 80.0180 యూనిట్లకు తగ్గిందని అర్థం.

∴ యంత్రం విలువలోని సగటు తగ్గుదల శాతం = 100 – 80.0180 = 19.98

ఉదా: ఒక దేశ జనాభా 1981లో 70 కోట్లు, 1991లో 90 కోట్లు. ఐతే ఈ పదేళ్లలో దేశ జనాభాలో వార్షిక సగటు పెరుగుదల శాతం?

సమాధానం: ఈ విధంగా దత్తాంశంలో ఒక రాశి తొలి విలువ, తుది విలువ, కాలవ్యవధులు ఇచ్చినప్పుడు చక్రవడ్డీ సూత్రాన్ని ఉపయోగించాలి.

ఒక రాశి విలువ 'P' ఐతే, ఆ రాశి ప్రతి ఏటా సగటున R% చొప్పున పెరిగితే 'n' సంవత్సరాల తర్వాత

ఆ రాశి విలువ =

$$P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

ఇప్పుడు దత్తాంశం ప్రకారం,

$$90 = 70\left(1+\frac{R}{100}\right)^{10}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{R}{100}\right)^{10} = \frac{90}{70} = 1.28571$$

$$\Rightarrow 1+\frac{R}{100} = (1.28571) = 1.02545$$

$$\Rightarrow \frac{R}{100} = 0.02545$$

R = 2.545

∴ ఈ పదేళ్లలో దేశ జనాభాలోని వార్షిక సగటు పెరుగుదల రేటు = 2.545%

శాతాలు-1

ఈ అంశం నుంచి direct గా కానీ indirectగా కాని ప్రశ్నలు అడగడానికి అవకాశం ఉంది.

శాతం:

శాతం అంటే 'నూటికి' అని అర్థం.

x% అంటే నూటికి లేదా వందకు x అని అర్థం.

ఉదాహరణ

50% మార్కులు అంటే వందకు 50 మార్కులు అని అర్థం.

శాతాన్ని భిన్నంగా:

x % అంటే x లో 100వ వంతు అని అర్థం.

$$\therefore x\% = \frac{x}{100}$$

ఉదాహరణ

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

ఇదేవిధంగా $20\% = \frac{1}{5}; 10\% = \frac{1}{10};$

$$\frac{1}{2}\% = \frac{1}{200}$$

ఇచ్చిన రాశిలో కొంత శాతాన్ని కనుగొనడం

x అనే రాశిలో $y\%$ = $x \times \frac{y}{100}$

ఉదాహరణ

50లో 60% = $50 \times \frac{60}{100} = 30$

ఉదాహరణ

600లో $33\frac{1}{3}\%$ ఎంత?

ఎ) 150 బి) 200 సి) 250 డి) 300

సమాధానం $33\frac{1}{3}=\frac{33\times3+1}{3}=\frac{100}{3}$

$\therefore$ 600లో $\frac{100}{3}\%=600\times$

$\frac{100}{3\times100}=200$

$\therefore$ సమాధానం (బి)

ఉదాహరణ

ఒక సంఖ్యలో 60 శాతానికి 25.2 సమానం. అయితే ఆ సంఖ్య ఎంత?

ఎ) 40 బి) 44 సి) 42 డి) 46

సమాధానం

ఆ సంఖ్యను $'x'$ అనుకొంటే అప్పుడు $'x'$

లో 60 శాతం = 25.2

$$\Rightarrow x\times\frac{60}{100}=25.2$$

$$\Rightarrow x=25.2\times\frac{100}{60}=42$$

$\therefore$ సమాధానం (సి)

ఉదాహరణ

ఒక సంఖ్యలోని 150 శాతం నుంచి 50 తీసివేస్తే అదే సంఖ్య వస్తుంది. అయితే ఆ సంఖ్య ఎంత?

ఎ) 100 బి) 50 సి) 150 డి) 200

సమాధానం

$'x'$లో 150% – 50 = x

$$\Rightarrow x\times\frac{150}{100}-50=x \qquad \Rightarrow\frac{3x}{2}-x=50 \qquad \Rightarrow\frac{x}{2}=50\Rightarrow x=100$$

ఉదాహరణ

6.5 లీటర్లలో 130 మిల్లీలీటర్లు ఎంత శాతం?

ఎ) 20 బి) 5సి) 2డి) 200

సమాధానం

మొదట రెండు రాశులను ఒకే ప్రమాణంలో రాయాలి.

6.5 లీటర్లు = 6,500 మిల్లీ లీటర్లు

అప్పుడు $6{,}500 \times \frac{x}{100} = 130$

$\Rightarrow x = 2$

$\therefore$ సమాధానం (సి)

ఉదాహరణ

1/3లో 1/2 ఎంత శాతం?

ఎ) 50 బి) 60 సి) 120 డి) 150

సమాధానం

$$\frac{1}{3} \times \frac{x}{100} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{300}{2} = 150$$

$\therefore$ సమాధానం (డి)

ఉదాహరణ

శరత్‌కి గణితంలో 75కి 60 మార్కులు, ఆంగ్లం లో 60కి 42 మార్కులు వచ్చాయి. అయితే ఏ సబ్జెక్టులో అతని ప్రతిభ మెరుగ్గా ఉంది?

ఎ) గణితం బి) ఆంగ్లం

సి) రెండింటిలోనూ సమాన ప్రతిభ ఉంది

డి) చెప్పలేం

సమాధానం

మొదట మార్కులను శాతాల్లో కనుక్కోవాలి. ఎందుకంటే రెండు సబ్జెక్టుల్లోని గరిష్ఠ మార్కు లు సమానం కాదు.

గణితం

$$75 \times \frac{x}{100} = 60$$

$$\Rightarrow x = 60 \times \frac{100}{75} = 80$$

అంటే గణితంలో 80 శాతం మార్కులు వచ్చాయి.

ఆంగ్లం

$$60 \times \frac{x}{100} = 42$$

$$\Rightarrow x = 42 \times \frac{100}{60} = 70$$

అంటే ఆంగ్లంలో 70% మార్కులు వచ్చాయి. అంటే శరత్ ప్రతిభ గణితంలో మెరుగ్గా ఉంది.

∴ సమాధానం (ఎ)

పెరిగిన/తరిగిన విలువ శాతం

పెరుగుదల శాతం =

(తుదివిలువ – తొలివిలువ)

------------------- × 100

తొలివిలువ

తగ్గుదల శాతం =

(తొలివిలువ – తుదివిలువ)

----------------- × 100

తొలివిలువ

తుదివిలువ =

తొలివిలువ ×

(100+పెరుగుదల శాతం)

100

తుదివిలువ =

తొలివిలువ ×

(100 – తగ్గుదల శాతం)

100

పై నాలుగు సూత్రాలు చాలా ముఖ్యమైనవి. ఈ సూత్రాలపై నేరుగా ప్రశ్నలు అడగవచ్చు. ఇతర అంశాల్లో కూడా చాలా సందర్భాల్లో ఈ సూత్రాలు అవసరం అవుతాయి.

ఉదాహరణ

శంకర్ ప్రస్తుత ఆదాయం నెలకు రూ. 12,000. అతని ఆదాయం 15 శాతం పెరిగితే, అతని నెలసరి ఆదాయం ఎంత?

ఎ) 13,000 బి) 13,500

సి) 13,800 డి) 13,900

సమాధానం

తుదివిలువ = తొలివిలువ × (100+పెరుగుదల శాతం)

100

అనే సూత్రాన్ని అనుసరించి

$$= \frac{12,000 \times (100 + 15)}{100}$$

= 13,800

∴ సమాధానం (సి)

ఉదాహరణ

రమణ తన బరువును 85 కేజీల నుంచి 68 కేజీలకు తగ్గించాడు. అయితే అతని బరువు ఎంత శాతం తగ్గింది?

ఎ) 17 బి) 18

సి) 19 డి) 20

సమాధానం

తగ్గుదల శాతం = $\frac{(85 - 68)}{85} \times 100$

$$= \frac{17}{85} \times 100 = 20$$

∴ సమాధానం (డి)

ఉదాహరణ

ప్రస్తుతం ఒక కంపెనీ సంవత్సర ఆదాయం రూ. 30 లక్షలు. ఆదాయం మొదటి సంవత్సరం 20 శాతం, రెండో సంవత్సరం 30 శాతం పెరిగింది. అయితే రెండు సంవత్సరాల తర్వాత కంపెనీ సంవత్సర ఆదాయం ఎంత?

ఎ) 45 లక్షలు బి) 35 లక్షలు

సి) 46.8 లక్షలు డి) 50 లక్షలు

సమాధానం

మొదటి సంవత్సరం తర్వాత కంపెనీ ఆదాయం

$$\frac{30 \times (100 + 20)}{100}$$

= 36 లక్షలు

ఈ 36 లక్షల రూపాయల ఆదాయం మీద రెండో సంవత్సరం 30 శాతం పెరిగింది. కాబట్టి రెండో సంవత్సరం తర్వాత కంపెనీ ఆదాయం $\frac{36 \times (100 + 30)}{100}$

= 46.8 లక్షలు

∴ సమాధానం (సి)

శాతాలు-2

కాలానుగుణంగా రాశులలో హెచ్చు తగ్గులు..

1. ఒక రాశి సంవత్సరానికి R% చొప్పున పెరిగితే, T సంవత్సరాల తర్వాత ఆ రాశి విలువ

$$= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^T$$

'P' అనేది రాశి తొలి విలువ

'T' సంవత్సరాల ముందు ఆ రాశి విలువ

$$= \frac{P}{\left(1+\frac{R}{100}\right)^T}$$

2. ఒక రాశి సంవత్సరానికి R% చొప్పున తగ్గితే, 'T' సంవత్సరాల తర్వాత ఆ రాశి విలువ

$$= P\left(1-\frac{R}{100}\right)^T$$

'T' సంవత్సరాల ముందు ఆ రాశి విలువ

$$= \frac{P}{\left(1-\frac{R}{100}\right)^T}$$

ఉదాహరణ

ఒక నగర జనాభా 10 లక్షలు. జనాభా సంవత్సరానికి 10% చొప్పున పెరిగితే 5 సంవత్సరాల తర్వాత ఆ నగర జనాభా ఎంత?

ఎ) 15 లక్షలు బి) 20 లక్షలు

సి) 16,10,510 డి) 15,10,510

సమాధానం

దత్తాంశంలో P = 10 లక్షలు

R = 10

T = 5

5 సంవత్సరాల తర్వాత నగర జనాభా

$$= 10,00,000\left(1+\frac{10}{100}\right)^5$$

$= 10,00,000\ (1.1)^5$

= 16,10,510

∴ సమాధానం (సి)

ఉదాహరణ

ఒక కొబ్బరిచెట్టు పొడవు ప్రస్తుతం 15 మీటర్లు సాలీనా ఆ చెట్టు 12% చొప్పున పెరుగుతున్నట్లయితే 2 సంవత్సరాల క్రితం ఆ కొబ్బరిచెట్టు పొడవు ఎంత?

ఎ) 11.95 మీటర్లు బి) 12.6 మీటర్లు

సి) 11.4 మీటర్లు డి) 12 మీటర్లు

సమాధానం

దత్తాంశంలో P = 15, R = 12, T = 2

2 సంవత్సరాల క్రితం చెట్టు పొడవు

$$= \frac{P}{\left(1+\frac{R}{100}\right)^T}$$

$$= \frac{15}{\left(1+\frac{12}{100}\right)^2} = 11.95$$

∴ సమాధానం (ఎ)

ఉదాహరణ

ఒక యంత్రం విలువ సంవత్సరానికి 10% తగ్గుతుంది. దాని ప్రస్తుత విలువ రూ. 1,62,000 అయితే 3 సంవత్సరాల క్రితం, 3 సంవత్సరాల తర్వాత ఆ యంత్రం విలువ ఎంత?

సమాధానం

3 సంవత్సరాల క్రితం యంత్రం విలువ

$$= \frac{P}{\left(1-\frac{R}{100}\right)^T}$$

$$= \frac{162000}{\left(1-\frac{10}{100}\right)^3} = \frac{162000}{(0.9)^3}$$

= రూ. 2,22,222.22

3 సంవత్సరాల తర్వాత యంత్రం విలువ

$$= P\left(1-\frac{R}{100}\right)^T$$

$$= 1,62,000\left(1-\frac{10}{100}\right)^3$$

= రూ. 1,18,098

రాశులలోని మార్పు – వాటి లబ్ధంపై ప్రభావం

ఒక రాశిలో $x\%$ మార్పు, రెండో రాశిలో $y\%$ మార్పు వస్తే ఆ రెండు రాశుల లబ్ధంలో వచ్చే మార్పు

శాతం

$= x + y + \frac{(x \times y)}{100}$

ఉదాహరణ

ఒక దీర్ఘచతురస్రం పొడవు 30% పెరిగి, వెడల్పు 12% తగ్గితే, దాని వైశాల్యంలోని మార్పు శాతం ఎంత?

ఎ) 21% పెరుగుతుంది

బి) 15.6% తగ్గుతుంది

సి)14.4% పెరుగుతుంది

డి) ఏ మార్పు ఉండదు

సమాధానం

వైశాల్యం = పొడవు × వెడల్పు

$x = +30, y = -12$

వైశాల్యంలోని మార్పు శాతం

$= 30 - 12 + \frac{(+30) \times (-12)}{100}$

$= 18 - \frac{18}{5}$

= +14.4

∴ సమాధానం (సి)

పై సూత్రాన్ని కింది సందర్భాల్లో కూడా ఉపయోగించవచ్చు.

1. చతురస్ర వైశాల్యం = భుజం × భుజం
2. వృత్త వైశాల్యం = π × (వ్యాసార్ధం)^2
3. దూరం = కాలం × వేగం
4. ఖర్చు = ధర × వినియోగం
5. గోళం ఉపరితల వైశాల్యం = 4π × (వ్యాసార్ధం)^2

ఉదాహరణ

ఒక వృత్తం వ్యాసార్ధం 10% పెరిగితే ఆ వృత్త వైశాల్యం ఎంత శాతం పెరుగుతుంది.

ఎ) 10% బి) 20% సి) 21% డి) 15%

సమాధానం

దత్తాంశంలో $x = +10$

$y = +10$

∴ వైశాల్యంలో మార్పు శాతం

$= x + y + \frac{(x \times y)}{100}$

$= 10 + 10 + \frac{(10 \times 10)}{100}$

= 21

∴ సమాధానం (సి)

ఉదాహరణ

కిలో చక్కెర ధర 5% తగ్గింది. అదే సమయంలో ఒక కుటుంబం చక్కెర వినియోగాన్ని 5% పెంచింది. అయితే ఆ కుంటుంబం చక్కెర మీద చేస్తున్న ఖర్చులోని మార్పు శాతమెంత?

ఎ) 25% తగ్గింది బి) 25% పెరిగింది

సి) 0.25% పెరిగింంది

డి) 0.25% తగ్గింది

సమాధానం

ఖర్చు = ధర × వినియోగం

$x = -5$

$y = +5$

∴ ఖర్చులోని మార్పు శాతం

$$= -5 + 5 + \frac{(-5) \times (+5)}{100}$$

= −0.25

∴ ఖర్చు 0.25% తగ్గింది

∴ సమాధానం (డి)

శాతాలు-3

మార్పు శాతం

ఈ శీర్షికలో మార్పు శాతం గురించి చర్చిద్దాం.

ముఖ్యమైన సూత్రాలు:

1) పెరుగుదల శాతం = $\dfrac{(\text{తుది విలువ} - \text{తొలి విలువ}) \times 100}{\text{తొలి విలువ}}$

2) తరుగుదల శాతం =

$\dfrac{(\text{తొలి విలువ} - \text{తుది విలువ}) \times 100}{\text{తొలి విలువ}}$

3) మార్పు శాతం =

$\dfrac{(\text{తుది విలువ} - \text{తొలి విలువ}) \times 100}{\text{తొలి విలువ}}$

గమనిక: మార్పు శాతం విలువ ధనాత్మకం అయితే అది పెరుగుదలను సూచిస్తుంది. రుణాత్మకం అయితే అది తరుగుదలను సూచిస్తుంది. పై సూత్రాల నుంచి కింది సూత్రాలను రాబట్టవచ్చు.

4) తుది విలువ =

$\dfrac{\text{తొలి విలువ} \times (100 + \text{పెరుగుదల శాతం})}{100}$

5) తుది విలువ =

$\dfrac{\text{తొలి విలువ} \times (100 - \text{తరుగుదల శాతం})}{100}$

6) తుది విలువ =

$\dfrac{\text{తొలి విలువ} \times (100 + \text{మార్పు శాతం})}{100}$

7) తొలి విలువ =

$\dfrac{\text{తుది విలువ} \times 100}{(100 + \text{పెరుగుదల శాతం})}$

8)**తొలి విలువ =**

$\frac{\text{తుది విలువ} \times 100}{(100 - \text{తరుగుదల శాతం})}$

9)**తొలి విలువ =**

$\frac{\text{తుది విలువ} \times 100}{(100 + \text{మార్పు శాతం})}$

10) ఒక రాశి ప్రస్తుత విలువ 'P' అనుకొంటే... మొదటి మూడు సంవత్సరాల్లో ఆ రాశిలోని మార్పు శాతాలు వరుసగా R_1, R_2, R_3 అయితే మూడు సంవత్సరాల తర్వాత ఆ రాశి విలువ =

$P \times \frac{(100+R_1)}{100} \times \frac{(100+R_2)}{100} \times \frac{(100+R_3)}{100}$

ఈ సూత్రాన్ని ఎన్ని సంవత్సరాలకైనా విస్తరిం చవచ్చు. రాశిలో పెరుగుదల నమోదైతే మార్పు శాతానికి ముందు '+' గుర్తు, రాశిలో తగ్గుదల నమోదైతే మార్పు శాతానికి ముందు '–' గుర్తు ఉంచాలి.

11) ఆయా సంవత్సరాలలో మార్పు శాతం స్థిరంగా ఉంటే ఈ కింది సూత్రాలను ఉపయోగించవచ్చు. ఒక రాశి ప్రస్తుత విలువ 'P' అనుకొంటే..

a) ఆ రాశి ప్రతి సంవత్సరం $R\%$ చొప్పున పెరిగితే 'n' సంవత్సరాల తర్వాత ఆ రాశి విలువ $= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

అలాగే 'n' సంవత్సరాలకు ముందు ఆ రాశి విలువ $= \frac{P}{\left(1+\frac{R}{100}\right)^n}$

b) ఆ రాశి ప్రతి సంవత్సరం $R\%$ చొప్పున తగ్గితే 'n' సంవత్సరాల తర్వాత ఆ రాశి విలువ $= P\left(1-\frac{R}{100}\right)^n$

అలాగే 'n' సంవత్సరాల క్రితం ఆ రాశి విలువ $= \frac{P}{\left(1-\frac{R}{100}\right)^n}$

12) ఆయా సంవత్సరాల్లో మార్పు శాతాలు మా రుతూ ఉంటే దానికి అనుగుణంగా పై సూత్రా లను మార్చి రాసుకోవచ్చు. ఉదాహరణకు రాశి విలువ మొదటి 'n_1' సంవత్సరాల పాటు $R_1\%$ చొప్పున, తర్వాతి 'n_2' సంవత్సరాల పాటు $R_2\%$ చొప్పున, తర్వాతి 'n_3' సంవత్స రాల పాటు $R_3\%$ చొప్పున పెరిగితే ఆ రాశి తుది విలువ

$= P \times \left(1+\frac{R_1}{100}\right)^{n_1}\left(1+\frac{R_2}{100}\right)^{n_2}\left(1+\frac{R_3}{100}\right)^{n_3}$

అలాగే ఆ రాశి విలువ మొదటి 'n_1' సంవత్స రాల పాటు $R_1\%$ చొప్పున, తర్వాతి 'n_2'

సంవత్సరాల పాటు $R_2\%$ చొప్పున పెరిగి, తర్వాతి 'n_3' సంవత్సరాల పాటు $R_3\%$ తగ్గితే ఆ రాశి తుది విలువ

$$= P\left(1+\frac{R_1}{100}\right)^{n_1}\left(1+\frac{R_2}{100}\right)^{n_2}\left(1-\frac{R_3}{100}\right)^{n_3}$$

ఇదేవిధంగా పై సూత్రాలను ఎన్ని సంవత్సరా లకైనా ఎటువంటి మార్పు శాతాలకైనా కూడా విస్తరించి రాసుకోవచ్చు.

పై సూత్రాలన్నింటినీ నిశితంగా అర్థం చేసుకొని, ఏ సూత్రాన్ని ఎప్పుడు ప్రయోగించాలో జాగ్రత్తగా గమనించాలి.

ఉదాహరణలు

1) ఒక యంత్రం ప్రస్తుత విలువ రూ. 1,62,000. దాని విలువ ప్రతి సంవత్సరం 10% చొప్పున తగ్గితే రెండు సంవత్సరాల తర్వాత దాని విలువ ఎంత? అలాగే రెండు సంవత్సరాల క్రితం దాని విలువ ఎంత?

సమాధానం:

దత్తాంశం నుంచి $P = 1,62,000$

$R = 10, n = 2$

రెండు సంవత్సరాల తర్వాత యంత్రం విలువ $= P\left(1-\frac{R}{100}\right)^n$

$$= 1,62,000\left(1-\frac{10}{100}\right)^2$$

$$= 1,62,000\ (0.90)^2$$

$$= 1,62,000 \times 0.81 = 1,31,220$$

$\therefore$ రెండు సంవత్సరాల తర్వాత యంత్రం విలువ = రూ.1,31,220

అలాగే రెండు సంవత్సరాల క్రితం యంత్రం విలువ $= \frac{P}{\left(1-\frac{R}{100}\right)^n}$

$$= \frac{162000}{\left(1-\frac{10}{100}\right)^2} = \frac{1,62,000}{0.81}$$

$$= 2,00,000$$

$\therefore$ రెండు సంవత్సరాల క్రితం యంత్రం విలువ = రూ. 2,00,000

2) రాము 300 చదరపు గజాల స్థలాన్ని చదరపు గజం రూ. 3000 చొప్పున కొన్నాడు. ఆ స్థలం విలువ మొదటి సంవత్సరం 10%, రెండో సంవ త్సరం 20% చొప్పున పెరిగి మూడు, నాలుగు సంవత్సరాలలో వరుసగా 15%, 10% చొప్పు న తగ్గింది. నాలుగేళ్ల తర్వాత రాము ఆ స్థలం అమ్మితే అతనికి లాభమా, నష్టమా ఎంత?

సమాధానం:

మొదట నాలుగు సంవత్సరాల తర్వాత చదరపు గజం స్థలం విలువ ఎంతో కనుక్కుందాం.

$P = 3000, \quad R_1 = 10, \; R_2 = 20,$

$R_3 = 15, \quad R_4 = 10$

నాలుగు సంవత్సరాల తర్వాత చదరపు గజం స్థలం విలువ

$$= P \times \frac{(100 + R_1)}{100} \times \frac{(100 + R_2)}{100} \times \frac{(100 - R_3)}{100} \times \frac{(100 - R_4)}{100}$$

$$= 3000 \times \frac{(100 + 10)}{100} \times \frac{(100 + 20)}{100} \times \frac{(100 - 15)}{100} \times \frac{(100 - 10)}{100}$$

$= 3000 \times 1.10 \times 1.20 \times 0.85 \times 0.90$

$= 3029.40$

అంటే 4 సంవత్సరాల తర్వాత చదరపు గజం స్థలం విలువ = రూ. 3029.40 అంటే రాముకు ఒక్కో చదరపు గజం మీద వచ్చే లాభం = రూ. 29.40

$\therefore$ రాముకు వచ్చే మొత్తం లాభం

$= 29.40 \times 300 = 8840$

రాముకు వచ్చే లాభం = రూ.8,840

3) ఒక నగర జనాభా 5 లక్షలు. ఆ నగర జనాభా మొదటి మూడు సంవత్సరాలు 5% చొప్పున, తరువాతి రెండు సంవత్సరాలు 2% చొప్పున పెరిగి, చివరి మూడు సంవత్సరాలు 2% చొప్పున తగ్గింది. అయితే ఈ '8' సంవత్సరాల తర్వాత ఆ నగర జనాభా ఎంత?

సమాధానం:

దత్తాంశం నుంచి $P = 5,00,000$

$R_1 = 5, n_1 = 3$

$R_2 = 2, \quad n_2 = 2$

$R_3 = 2 \;\; n_3 = 3$

8 సంవత్సరాల తర్వాత నగర జనాభా

$$= P \times \left(1 + \frac{R_1}{100}\right)^{n_1} \left(1 + \frac{R_2}{100}\right)^{n_2} \left(1 - \frac{R_3}{100}\right)^{n_3}$$

$$= 5,00,000 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 \left(1 + \frac{2}{100}\right)^2$$

$\left(1-\frac{2}{100}\right)^3$

$= 5,00,000 \times (1.05)^3 \times (1.02)^3 \times (0.98)^3 = 5,18,645$

$\therefore$ 8 సంవత్సరాల తర్వాత నగర జనాభా సుమారుగా 5,18,645.

నిష్పత్తి

నిష్పత్తికి సంబంధించి మౌలికమైన అంశాలు, కొన్ని సమస్యల గురించి గతంలో చర్చించాం. ఇప్పుడు మరికొన్ని సమస్యలను చూద్దాం.

ఉదాహరణలు:

1. పదేళ్ల కాలంలో A, B పదేళ్లకు పూర్వమున్న వయసునకు రెండింతలుంటారు. ఒకవేళ, ఇప్పుడు B కంటే A 9 ఏళ్లు పెద్దవాడైతే B ప్రస్తుత వయసు ఎంత?

స. ప్రస్తుతం A, Bల వయసులు వరుసగా a, b ఏళ్లు అనుకొంటే అప్పుడు దత్తాంశం నుంచి

$a + 10 = 2(b - 10) \rightarrow I$

$a = b + 9 \rightarrow II$

II ను I లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$b + 9 + 10 = 2(b - 10)$

$\Rightarrow b + 19 = 2b - 20$

$\Rightarrow b = 39$

$\therefore$ ప్రస్తుతం B వయసు 39 ఏళ్లు

2. ప్రస్తుతం రఘు వయసు తన తండ్రి వయసులో సగం. 15 ఏళ్ల క్రితం రఘు వయసు తన తండ్రి వయసులో మూడో వంతు. అయిదేళ్ల తర్వాత రఘు వయస్సు ఎంత?

స. ప్రస్తుతం రఘు వయస్సు R అనుకుంటే అతని తండ్రి వయస్సు 2R అవుతుంది. అప్పుడు దత్తాంశం నుంచి

$R - 15 = \frac{2R - 15}{3}$

$\Rightarrow 3(R - 15) = 2R - 15$

$\Rightarrow 3R - 45 = 2R - 15 \quad \Rightarrow R = 30$

అంటే ప్రస్తుతం రఘు వయసు 30 ఏళ్లు.

$\therefore$ అయిదేళ్ల తర్వాత రఘు వయసు 35 ఏళ్లు.

3. ఒక సంచిలో 50 పైసలు, 25 పైసలు, 20 పైసల నాణాలు 5 : 9 : 4 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. వాటి మొత్తం విలువ 222 రూపాయలు. అయితే సంచిలోని మొత్తం నాణాల సంఖ్య ఎంత?

స. ఇచ్చిన నిష్పత్తి నుంచి 50, 25, 20 పైసల నాణాల సంఖ్య వరుసగా 5K, 9K, 4K అవుతుంది.

నాణాల మొత్తం విలువ:

$5K \times 50 + 9K \times 25 + 4K \times 20$ పైసలు.

దత్తాంశం నుంచి

$5K \times 50 + 9K \times 25 + 4K \times 20$

$= 22,200$

$\Rightarrow 250K + 225K + 80K = 22,200$

($\because$ 222 రూ॥లను పైసలలోకి మార్చితే 22,200 పైసలు వస్తుంది).

$\Rightarrow 555K = 22,200$

$\Rightarrow K = 40$

సంచిలోని మొత్తం నాణాల సంఖ్య

$= 5K + 9K + 4K = 18K$

$= 18 \times 40 = 720$

$\therefore$ మొత్తం నాణాల సంఖ్య = 720

4. ఒక ఆఫీసులో ఉద్యోగుల సంఖ్యను 4 : 3కి తగ్గించి వారి జీతాలను 6 : 7కి పెంచితే పెరిగిన లేదా తగ్గిన జీతాల నిష్పత్తి ఎంత?

స. ఉద్యోగుల సంఖ్యను 4K నుంచి 3Kకి తగ్గించి, వారి జీతాలను 6L నుంచి 7Lకి పెంచారు అనుకొందాం.

అప్పుడు ఆఫీసులోని అందరు ఉద్యోగుల జీతాల మొత్తం (మొదట) = $4K \times 6L = 24KL$

జీతాల మొత్తం (తరువాత) = $3K \times 7L$

$= 21KL$

కాబట్టి జీతాల మొత్తం 24KL నుంచి 21KLకి తగ్గింది.

$\therefore$ తగ్గిన జీతాల నిష్పత్తి

$= 24KL : 21KL$

$= 24 : 21 = 8 : 7$

$\therefore$ తగ్గిన జీతాల నిష్పత్తి $= 8 : 7$

5. ఒక వ్యక్తి వయస్సు తన ఇద్దరు కుమారుల వయస్సుల మొత్తానికి మూడు రెట్లు. అయిదేళ్ల తర్వాత అతని వయస్సు కుమారుల వయస్సుల మొత్తానికి రెట్టింపవుతుంది. అయితే ఆ వ్యక్తి ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత? (Civils Prelims – 2002)

స. ఇద్దరు కుమారుల వయస్సుల మొత్తం x ఏళ్లు అనుకొంటే తండ్రి వయస్సు 3x ఏళ్లు అవుతుంది.

అయిదేళ్ల తర్వాత కుమారుల వయస్సుల మొత్తం = $x + 5 + 5$ ఏళ్లు $= x + 10$ ఏళ్లు

అయిదేళ్ల తర్వాత తండ్రి వయస్సు =

$3x + 5$ ఏళ్లు

కాని దత్తాంశం నుంచి

$3x + 5 = 2(x + 10)$

$\Rightarrow 3x + 5 = 2x + 20 \Rightarrow x = 15$

వ్యక్తి ప్రస్తుత వయస్సు = $3x = 3 \times 15 = 45$

$\therefore$ వ్యక్తి ప్రస్తుత వయస్సు = 45 ఏళ్లు

6. 12 అద్దాలతో అలంకరించిన ఒక బొమ్మ పొరపాటున కింద పడింది. ఈ కింది నిష్పత్తుల్లో ఏది పగిలిన అద్దాలకు, పగలని అద్దాలకు గల నిష్పత్తి కాజాలదు?

ఎ) 2 : 1 బి) 3 : 1

సి) 3 : 2 డి) 7 : 5

స. 2 : 1, 3 : 1, 3 : 2, 7 : 5 నిష్పత్తుల్లో నిష్పత్తి పదాల మొత్తం వరుసగా 3, 4, 5, 12 అవుతుంది. వీటిలో 3, 4, 12లు 12 ను నిశ్శేషంగా భాగిస్తాయి. కాని 5 నిశ్శేషంగా భాగించదు. కాబట్టి పగిలిన అద్దాలకు, పగలని అద్దాలకు గల నిష్పత్తి 3 : 2 కాజాలదు.

$\therefore$ సమాధానం : (సి)

7. రెండు సంఖ్యల నిష్పత్తి 5 : 8, వాటి మొత్తం 91. అయితే, ఆ రెండు సంఖ్యలు ఏవి? (Group I, Prelims – 1991)

స. మొదటి సంఖ్య =

$$\frac{91 \times \text{మొదటి నిష్పత్తి పదం}}{\text{నిష్పత్తి పదాల మొత్తం}}$$

$$= \frac{91 \times 5}{(5 + 8)} = \frac{91 \times 5}{13}$$

$= 35$

రెండో సంఖ్య = $91 - 35 = 56$

$\therefore$ ఆ రెండు సంఖ్యలు = 35, 56

నిష్పత్తి-అనుపాతం

- ఒకే ప్రమాణంలో ఉన్న రెండు రాశుల మధ్య పోలికను నిష్పత్తి అంటారు.

  x, y అనే రెండు రాశుల మధ్య నిష్పత్తిని '$x : y$' అని సూచిస్తాం. దీన్ని 'x is to y' అని చదువుతాం.

$$x : y = \frac{x}{y}$$

  రెండు రాశుల మధ్య నిష్పత్తిని కనుక్కోవాలంటే ఆ రెండు రాశులు ఒకే ప్రమాణంలో ఉండాలి.

- $x : y$ అనే నిష్పత్తిలో x, y లను నిష్పత్తి పదాలు అని అంటారు. 'x'ను పూర్వపదం (Antecedent) అని, 'y'ను పరపదం (Consequent) అని అంటారు.
- నిష్పత్తిలో పదాల క్రమం పరిగణించదగింది. అంటే $x : y$, $y : x$ అనే రెండు నిష్పత్తులు సమానం కావు.

  $x : y \neq y : x$

అనుపాతం

రెండు నిష్పత్తుల మధ్య సమానత్వాన్ని అనుపాతం అని అంటారు.

ఉదాహరణ:

$a : b = c : d$ అయితే a, b, c, dలు అనుపాతంలో ఉన్నాయని అంటారు.

$a : b = c : d$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$

$\therefore$ అంత్యముల లబ్ధం = మధ్యముల లబ్ధం.

ఉదాహరణ:

36 గంటలకు, 2 రోజులకు గల నిష్పత్తి ఎంత?

సమాధానం:

2 రోజులు = 2×24 గంటలు

= 48 గంటలు

కావాల్సిన నిష్పత్తి = $36 : 48$

$= 3 : 4$ (నిష్పత్తి పదాలను 12తో భాగిస్తే)

$\therefore$ సమాధానం $- 3 : 4$

- నిష్పత్తిలోని రెండు పదాలను ఒకేసంఖ్యతో (సున్నా కాకుండా ఇతర సంఖ్య) గుణించినా లేదా భాగించినా ఆ నిష్పత్తి విలువ మారదు.

  $x : y = Px : Py, (P \neq 0)$

  $x : y = \frac{x}{P} : \frac{y}{P}, (P \neq 0)$

ఉదాహరణ:

$2 : 3 = 4 \times 2 : 4 \times 3 = 8 : 12,$

36 48

$= \frac{36}{12} : \frac{48}{12} = 3 : 4$

- $\boxed{\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a}$
- $\boxed{\frac{m}{a} : \frac{n}{b} = mb : na}$
- $a : b : c = l : m : n$ అయితే

$a = kl$, $b = km$, $c = kn$ (k ఏదైన ఒక చర రాశి) అని అనుకోవచ్చు.

ఉదాహరణ:

$x : y = 3 : 4$ **అయితే** $(4x + 5y) : (5x - 2y)$ **విలువ ఎంత?**

సమాధానం:

$x : y = 3 : 4$ కాబట్టి

$x = 3k,$

$y = 4k$ అనుకోవచ్చు.

$\Rightarrow (4x + 5y) : (5x - 2y)$

$= \frac{4x + 5y}{5x - 2y}$

$= \frac{4 \times 3k + 5 \times 4k}{5 \times 3k - 2 \times 4k}$

$= \frac{32k}{7k} = \frac{32}{7} = 32 : 7$

$\therefore$ సమాధానం – 32 :7

గమనిక: పై ప్రశ్నలో నేరుగా 'x'కి బదులు 3, 'y'కి బదులు 4ను ప్రతిక్షేపించినా కూడా సమాధానం వస్తుంది.

ఉదాహరణ:

$A : B : C = 2 : 3 : 4$ **అయితే** $\frac{A}{B} : \frac{B}{C} : \frac{C}{A}$ **విలువ ఎంత?**

(ఎస్.ఎస్.సి.–2002)

సమాధానం:

$\frac{A}{B} : \frac{B}{C} : \frac{C}{A} = \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{2}$

2, 3, 4ల క.సా.గు. 12 కాబట్టి నిష్పత్తిలోని మూడు పదాలను 12తో గుణిస్తే,

$= \frac{2}{3} \times 12 : \frac{3}{4} \times 12 : \frac{4}{2} \times 12$

$= 8 : 9 : 24$

$\therefore$ సమాధానం $8 : 9 : 24$

ఉదాహరణ:

$A : B = 2 : 3, B : C = 4 : 5, C : D = 6 : 7$ **అయితే** $A : B : C : D$ **విలువ ఎంత?**

(ఎస్.ఎస్.సి.–2002)

సమాధానం:

ఈ మోడల్ సమస్యలను సాధించడానికి షార్ట్‌కట్ మెథడ్‌ని చూద్దాం.

$$\begin{array}{lcc} & \text{I} & \text{II} \\ A : B = & 2 : & 3 \\ B : C = & 4 : & 5 \\ C : D = & 6 : & 7 \end{array}$$

పైన మొదటి నిలువు వరుస (I)లో 2, 4, 6, రెండో నిలువు వరుస (II)లో 3, 5, 7 అనే సంఖ్యలు ఉన్నాయి.

$A : B : C : D =$

$2 \times 4 \times 6 \ : \ 4 \times 6 \times 3 \ : \ 6 \times 3 \times 5 \ : \ 3 \times 5 \times 7.$

$2 \times 4 \times 6 \rightarrow$ Iలోని మూడు పదాలు

$4 \times 6 \times 3 \rightarrow$ Iలోని చివరి రెండు పదాలు, IIలోని మొదటి పదం

$6 \times 3 \times 5 \rightarrow$ Iలోని చివరి పదం, IIలోని మొదటి రెండు పదాలు.

$3 \times 5 \times 7 \rightarrow$ IIలోని మూడు పదాలు

పదాలను తీసుకున్న వరుసను గమనించండి.

$\Rightarrow A : B : C : D = 2 \times 4 \times 2 : 4 \times 6 : 6 : 5 : 5 \times 7$ (నిష్పత్తిలోని అన్ని పదాలను 3తో భాగిస్తే)

$= 16 : 24 : 30 : 35$

$\therefore$ సమాధానం $16 : 24 : 30 : 35$

గమనిక: నిష్పత్తిలో ఎన్ని పదాలు ఉన్నప్పటికీ కూడా పై విధానాన్ని అనుసరించవచ్చు.

కొంత మొత్తాన్ని ఇచ్చిన నిష్పత్తిలో విభజించడం:

ఉదాహరణ:

672ను 5 : 3 నిష్పత్తిలో విభజించండి.

సమాధానం:

మొదటి భాగం =

$$\frac{\text{మొత్తం} \times \text{మొదటి నిష్పత్తి పదం}}{\text{నిష్పత్తి పదాల మొత్తం}}$$

$$= \frac{672 \times 5}{5+3} = \frac{672 \times 5}{8}$$

$= 84 \times 5 = 420$

∴ మొదటి భాగం = 420

రెండో భాగం = 672 – 420 = 252

∴ సమాధానం – 420, 252

గమనిక:

రెండో భాగం =

$$\frac{\text{మొత్తం} \times \text{రెండో నిష్పత్తి పదం}}{\text{నిష్పత్తి పదాల మొత్తం}}$$

అలాగే మూడు, నాలుగు భాగాలకు కూడా సూత్రాలను రాసుకోవచ్చు.

ఉదాహరణ:

రూ. 1300లను P, Q, R, Sలు పంచుకు న్నారు.

$$= \frac{\text{P వాటా}}{\text{Q వాటా}} = \frac{\text{Q వాటా}}{\text{R వాటా}}$$

$$= \frac{\text{R వాటా}}{\text{S వాటా}} = \frac{2}{3}$$

అయితే 'P' వాటా ఎంత?

(ఎల్.ఐ.సి. 2003)

సమాధానం:

P : Q = 2 : 3, Q : R = 2 : 3

R : S = 2 : 3

⇒ P : Q : R : S

= 2 × 2 × 2 : 2 × 2 ×3 : 2 × 3 × 3 : 3 × 3 × 3

= 8 : 12 : 18 : 27

∴ P వాటా =

$$\frac{1300 \times 8}{(8+12+18+27)}$$

$$= \frac{1300 \times 8}{65} = 160$$

∴ *P* వాటా = రూ. 160

గమనిక:

ఒక వేళ '*R*' వాటా కనుక్కోవాలంటే '*R*' వాటా

$$= \frac{1300 \times 18}{(8+12+18+27)} = \text{రూ}.360$$

(∴ 'R'కి సంబంధించిన నిష్పత్తి పదం '18')

బారు వడ్డీ-చక్ర వడ్డీ

బారువడ్డీ

P – అసలు   R – వడ్డీరేటు (సం॥కి)

T – కాలం (సం॥లో) అయితే

బారువడ్డీ $= \frac{P \times T \times R}{100}$

మొత్తం (A) $= P + \frac{P \times T \times R}{100}$

$= P\left(1 + \frac{T + R}{100}\right)$

ఉదాహరణలు

1. రూ. 10,000 మీద 6% వడ్డీరేటు చొప్పున 3 సంవత్సరాలకు మొత్తం ఎంత అవుతుంది?

ఎ) రూ. 12,000 బి) రూ. 11,000

సి) రూ. 11,8000 డి) రూ. 1,800

సమాధానం: సి

దత్తాంశంలో P = 10,000, R = 6, T = 3

మొత్తం $= P + \frac{P \times T \times R}{100}$

$= 10,000 + \frac{10,000 \times 3 \times 6}{100}$

$= 10,000 + 1,800$

$= 11,800$

2. కొంత డబ్బు మీద 9% వడ్డీరేటుతో, 6 సంవత్సరాలకు బారువడ్డీ రూ. 810 అయితే అసలు ఎంత?

ఎ) రూ. 1500   బి) రూ. 5400

సి) రూ. 2310   డి) రూ. 690

సమాధానం: ఎ

బారువడ్డీ $= \frac{P \times T \times R}{100}$

$\Rightarrow 810 = \frac{P \times 6 \times 9}{100}$

$\Rightarrow P = \frac{810 \times 100}{6 \times 9} = 1500$

3. రూ. 500 మీద 5% వడ్డీరేటుతో కొంత కాలా నికి వచ్చే బారువడ్డీ, రూ. 380 మీద అంతే వడ్డీరేటుతో, అంతే కాలానికి వచ్చే బారువడ్డీ కన్నా రూ. 36 ఎక్కువ. అయితే కాలం ఎంత?

ఎ) 3 సం॥లు   బి) 6 సం॥లు

సి) 9 సం॥లు   డి) 12 సం॥లు

సమాధానం: బి

$$\frac{500 \times 5 \times T}{100} = \frac{380 \times 5 \times T}{100} + 36$$

$\Rightarrow$ $500 \times 5 \times T = 380 \times 5 \times T + 3600$

$\Rightarrow$ T = 6 సం॥లు.

4. ఒక వ్యక్తి కొంత డబ్బును బారువడ్డీకి అప్పుగా ఇచ్చాడు. 8 సంవత్సరాలకు అతనికి రెట్టింపు డబ్బు రావాలంటే వడ్డీ శాతం ఎంత ఉండాలి?

ఎ) 16%   బి) 4%   సి) 24%   డి) 12.5%

సమాధానం: డి

8 సంవత్సరాల తర్వాత డబ్బు రెట్టింపు కావాలంటే బారువడ్డీ అసలుకు సమానం కావాలి.

$\therefore$ బారువడ్డీ $= P = \frac{P \times 8 \times R}{100}$

$$\Rightarrow R = \frac{100}{8} = 12.5$$

చక్రవడ్డీ

1. చక్రవడ్డీ అంటే ప్రతి నిర్ణీత కాలానికి ఒకసారి వడ్డీ అస లులో కలుస్తుంది. అంటే వడ్డీ మీద కూడా వడ్డీ చెల్లిం చాల్సి ఉంటుంది.

మొత్తం (A) $= P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^T$

ఇక్కడ

P – అసలు,   R – వడ్డీరేటు

T – కాలం (సం॥లో)

వడ్డీ ప్రతి సంవత్సరానికి ఒకసారి అసలులో కలుస్తుంది.

2. P – అసలు, R – వడ్డీరేటు (సం॥కి), T – కాలం (సం॥లో) ఉండి, వడ్డీ ప్రతి 'n' సంవత్సరాలకు ఒకసారి అసలులో కలిస్తే

మొత్తం (A) $= P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^{\frac{T}{n}}$

3. దత్తాంశంలో ప్రత్యేకంగా ప్రస్తావించనంత వరకు వడ్డీరేటును సంవత్సరానికి గాను, అలాగే వడ్డీ ప్రతి సంవత్సరానికి ఒకసారి అసలులో కలుస్తుందని భావించాలి.

ఉదాహరణలు

1. రాము రూ. 5,000ను 2.5% వడ్డీరేటుతో అప్పు చేశాడు. వడ్డీ సంవత్సరానికి ఒకసారి అసలులో కలుస్తుంది. అయితే 3 సంవత్సరాల తర్వాత తాను చెల్లించాల్సిన మొత్తమెంత?

   ఎ) 5375 బి) 5375.45

   సి) 5384.45 డి) 5384

సమాధానం: సి

చక్రవడ్డీ సూత్రం $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^T$

$\Rightarrow A = 5000\left(1+\frac{2.5}{100}\right)^3$

$= 5000\ (1.025)^3$

$= 5384.45$

= రూ. 5384.45

2. పై సమస్యలో వడ్డీ 6 నెలలకు ఒకసారి అసలులో కలిస్తే, 3 సంవత్సరాల తర్వాత రాము చెల్లించాల్సిన మొత్తమెంత?

ఎ) 5375 బి) 5384.45

సి) 5700 డి) 5798.467

సమాధానం: డి

n = 6 నెలలు $= \frac{1}{2}$ సం॥

మొత్తం (A) $= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{\frac{T}{n}}$

$= 5000\left(1+\frac{2.5}{100}\right)^{2\times 3}$

$= 5798.467$

3. ఎన్ని సంవత్సరాలకు రూ. 24000, 5% చక్ర వడ్డీ రేటు చొప్పున రూ. 27,783 అవుతుంది?

   ఎ) 2 బి) 3 సి) 4 డి) 5

సమాధానం: బి

చక్రవడ్డీ సూత్రం

మొత్తం (A) $= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^T$

$\Rightarrow 27783 = 24000\left(1+\frac{5}{100}\right)^T$

$$\Rightarrow \frac{27783}{24000} = (1+0.05)^T = (1.05)^T$$
$$\Rightarrow 1.157625 = (1.05)^T$$
$$\Rightarrow T = 3$$

చక్రవడ్డీ రేటు మొదటి T_1 సంవత్సరాలకు R_1, తర్వాతి T_2 సంవత్సరాలకు R_2 అయితే

మొత్తం (A)

$$= P\left(1+\frac{R_1}{100}\right)^{T_1}\left(1+\frac{R_2}{100}\right)^{T_2}$$

$(T_1 + T_2)$ సంవత్సరాల తర్వాత మొత్తాన్ని కనుగొనడానికి పై సూత్రాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

ఉదాహరణలు

1. రూ. 4000 మీద మొదటి 3 సంవత్సరాలు చక్రవడ్డీ 10%, తర్వాత 2 సంవత్సరాలకు 20% చొప్పున 5 సంవత్సరాల చివరికి వడ్డీ ఎంత అవుతుంది?

ఎ) 7667 బి) 2800 సి) 3667 డి) 6800

సమాధానం: సి

దత్తాంశంలో

$P = 4000$,

$R_1 = 10$,

$T_1 = 3$,

$R_2 = 20$,

$T_2 = 2$

మొత్తం (A)

$$= P\left(1+\frac{R_1}{100}\right)^{T_1}\left(1+\frac{R_2}{100}\right)^{T_2}$$

$$= 4000\left(1+\frac{10}{100}\right)^{3}\left(1+\frac{20}{100}\right)^{2}$$

$= 4000\ (1.1)^3\ (1.2)^2$

$= 7666.56$

వడ్డీ = మొత్తం – అసలు

$= A – P$

$= 7666.56 – 4000$

$= 3666.56$

లాభ-నష్టాలు

వస్తువులను కొనడం, అమ్మడం, ఈ ప్రక్రియలో వచ్చే లాభనష్టాలు మొదలైన అంశాల నుంచి ప్రశ్నలు తప్పనిసరిగా వస్తాయి.

1. లాభం = అమ్మిన వెల – కొన్న వెల
2. నష్టం = కొన్న వెల – అమ్మిన వెల
3. లాభ శాతం $= \frac{\text{లాభం} \times 100}{\text{కొన్న వెల}}$
4. నష్ట శాతం $= \frac{\text{నష్టం} \times 100}{\text{కొన్న వెల}}$

ఉదాహరణలు

1. ఒక వ్యాపారి ఒక వస్తువును అమ్మితే అతనికి రూ. 50 లాభం వచ్చింది. అతని లాభ శాతం $6\frac{1}{4}\%$ అయితే ఆ వస్తువు కొన్నవెల ఎంత?

ఎ) రూ. 850 బి) రూ. 800

సి) రూ. 700 డి) రూ. 600

సమాధానం: బి

లాభశాతం $= \frac{\text{లాభం} \times 100}{\text{కొన్నవెల}}$

$\Rightarrow 6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$

$= \frac{50 \times 100}{\text{కొన్నవెల}}$

$\Rightarrow$ కొన్నవెల $= 50 \times 100 \times \frac{4}{25} = 800$

2. అమ్మిన వెలకు కొన్నవెలకు నిష్పత్తి 3 : 2 అయితే లాభశాతం ఎంత?

ఎ) $33\frac{1}{3}\%$ బి) $66\frac{2}{3}\%$

సి) 50% డి) 75%

సమాధానం: సి

అమ్మిన వెలకు, కొన్నవెలకు నిష్పత్తి 3 : 2

కాబట్టి అమ్మిన వెల = $3x$ అనుకుంటే

కొన్నవెల = $2x$ అవుతుంది.

లాభం = $3x - 2x = x$

లాభశాతం= $\frac{\text{లాభం}}{\text{కొన్నవెల}} \times 100$

$= \frac{x}{2x} \times 100 = 50$

ముఖ్యమైన సూత్రాలు

1. అమ్మిన వెల

   $= \frac{\text{కొన్నవెల} \times (100 + \text{లాభశాతం})}{100}$

2. అమ్మిన వెల

   $= \frac{\text{కొన్నవెల} \times (100 - \text{నష్టశాతం})}{100}$

3. కొన్నవెల $= \frac{\text{అమ్మిన వెల} \times 100}{(100 + \text{లాభశాతం})}$

4. కొన్నవెల $= \frac{\text{అమ్మిన వెల} \times 100}{(100 - \text{నష్టశాతం})}$

ఉదాహరణలు

1. ఒక వస్తువు కొన్నవెల రూ. 720. ఆ వస్తువును ఎంతకు అమ్మితే $11\frac{1}{9}\%$ నష్టం వస్తుంది?

ఎ) రూ. 640 బి) రూ. 648

సి) రూ. 620 డి) రూ. 600

సమాధానం: ఎ

నష్టం =

$= 11\frac{1}{9}\% = \frac{100}{9}\%$

అమ్మిన వెల $= \frac{\text{కొన్నవెల} \times (100 - \text{నష్టశాతం})}{100}$

$$\therefore \quad \text{అమ్మిన వెల} = \frac{720\times\left(100-\frac{100}{9}\right)}{100}$$

= 640

2. ఒక వస్తువును రూ. 450కి అమ్మితే 25% నష్టం వస్తుంది. అయితే 50% లాభం రావాలంటే ఆ వస్తువును ఎంతకు అమ్మాలి?

ఎ) రూ. 675 బి) రూ. 900

సి) రూ. 800 డి) రూ. 600

సమాధానం: బి

అమ్మిన వెల = రూ. 450, నష్టం = 25%

$$\text{అయితే కొన్నవెల} = \frac{\text{అమ్మిన వెల} \times 100}{(100 - \text{నష్టశాతం})}$$

$$= \frac{450\times100}{100-25} = 600$$

కాబట్టి ఆ వస్తువు కొన్నవెల = రూ. 600

ఇప్పుడు 50% లాభం రావాలంటే ఆ వస్తువును అమ్మవలసిన వెల

$$= \frac{\text{కొన్నవెల} \times (100 + \text{లాభశాతం})}{100}$$

$$= \frac{600\times(100+50)}{100} = 900$$

= 900

3. ఒక వ్యాపారి రెండు వస్తువులను ఒక్కొక్కటి రూ. 480కి అమ్మితే మొదటిదానిపై 20% లాభం, రెండో దానిపై 20% నష్టం వచ్చింది. అయితే మొత్తం మీద అతనికి లాభమా? నష్టమా? ఎంత శాతం?

ఎ) లాభం, నష్టం రెండూ కాదు

బి) 4% లాభం సి) 14% నష్టం

డి) 4% నష్టం

సమాధానం: డి

సూత్రం: రెండు వస్తువులను ఒకే ధరకు అమ్మితే, ఒకదానిపై $x\%$ లాభం, మరొక వస్తువుపై $x\%$ నష్టం వస్తే మొత్తంమీద $\frac{x\times x}{100}\%$ నష్టం వస్తుంది.

$\therefore$ నష్టం $= \frac{20 \times 20}{100}\% = 4\%$

కాబట్టి మొత్తంమీద అతనికి 4% నష్టం వస్తుంది.

4. రెండు గడియారాలను ఒకే ధరకు అమ్మితే, ఒకదాని మీద 15% లాభం, మరొకదాని మీద 15% నష్టం వచ్చాయి. అయితే మొత్తంమీద లాభమా? నష్టమా? ఎంత శాతం?

ఎ) 2.25% నష్టం బి) 2.25% లాభం

సి) 7.5% నష్టం

డి) లాభం, నష్టం రెండూ కాదు

సమాధానం: ఎ

నష్టం $= \frac{x \times x}{100}\%$

$$= \frac{15 \times 15}{100}\% = 2.25\%$$

5. 15 వస్తువుల కొన్నవెల, 12 వస్తువుల అమ్మిన వెల సమానం అయితే లాభశాతం/నష్టశాతం ఎంత?

ఎ) 20% లాభం బి) 20% నష్టం

సి) 25% లాభం డి) 25% నష్టం

సమాధానం: సి

ఒక వస్తువు కొన్నవెల = x అనుకుంటే, అప్పుడు దత్తాంశం నుంచి

$15 \times x = 12 \times$ అమ్మిన వెల

$\Rightarrow$ అమ్మిన వెల $= \frac{15 \times x}{12} = \frac{5x}{4}$

లాభం $= \frac{5x}{4} - x = \frac{x}{4}$

లాభ శాతం $= \frac{\frac{x}{4}}{x} \times 100 = 25$

6. ఒక వ్యాపారి రూపాయికి 30 నిమ్మకాయలు కొన్నాడు. అతనికి 20% లాభం రావాలంటే రూపాయికి ఎన్ని నిమ్మకాయలు అమ్మాలి?

ఎ) 24 బి) 36 సి) 20డి) 25

సమాధానం: డి

30 నిమ్మకాయల కొన్నవెల = రూ. 1

లాభం = 20%

$\Rightarrow$ 30 నిమ్మకాయల అమ్మిన వెల =

$$= \frac{1 \times (100 + 20)}{100}$$

= రూ. 1.20

అంటే రూ. 1.20కి 30 నిమ్మకాయలు అమ్మాలి.

$\therefore$ రూ. 1కి అమ్మవలసిన నిమ్మకాయలు

$$= \frac{30}{1.20} = 25$$

వైశాల్యాలు-1

వైశాల్యం

ఒక నిర్దిష్ట ప్రాంతం విస్తీర్ణమే వైశాల్యం. వైశాల్యా నికి ప్రమాణం చదరపు యూనిట్లు లేదా స్క్వేర్ యూనిట్లు. అంటే చదరపు సెం.మీ., చదరపు మీటరు మొదలైనవి (square cm, square meter, cm^2, $meter^2$ అని కూడా రాస్తారు) వైశాల్యాల ప్రమాణాలకు సంబంధించి కింది అంశాలు గుర్తుంచుకోవాలి.

1 చదరపు మీటరు = 10,000 చదరపు సెం.మీ.

1 ఏర్ = 100 చదరపు మీటర్లు

1 హెక్టారు = 10,000 చదరపు మీటర్లు

1 హెక్టారు = 2.47 ఎకరాలు (సుమారుగా)

1 ఎకరా = 4,046.85 చదరపు మీటర్లు

1 ఎకరా = 4,840 చదరపు గజాలు

1 చదరపు మైలు = 640 ఎకరాలు

1 మైలు = 1.6 కిలో మీటర్లు

1 నాటికల్ మైలు = 1.852 కిలోమీటర్లు

1 అంగుళం = 2.54 సెం.మీ.

1 అడుగు = 12 అంగుళాలు = 30.48 సెం.మీ.

1 గజం = 3 అడుగులు

దీర్ఘచతురస్రం

1. వైశాల్యం = పొడవు × వెడల్పు

   చుట్టుకొలత = 2 (పొడవు + వెడల్పు)

   $(కర్ణం)^2 = (పొడవు)^2 + (వెడల్పు)^2$

2. ఒక దీర్ఘ చతురస్ర పొడవులో $x\%$ మార్పు, వెడల్పులో $y\%$ మార్పు వస్తే దాని వైశాల్యంలో వచ్చే మార్పు శాతం

$$= x + y + \frac{x \times y}{100}$$

3. ఒక దీర్ఘచతురస్ర రెండు కొలతల్లో ఒక కొలతను $x\%$ పెంచినప్పుడు, దాని వైశాల్యాన్ని స్థిరంగా ఉంచాలంటే దాని రెండో కొలతను తగ్గించాల్సిన శాతం

$$= \frac{100 \times x}{100 + x}$$

4. ఒక దీర్ఘ చతురస్ర రెండు కొలతల్లో ఒక కొలతను $x\%$ తగ్గించినప్పుడు, దాని వైశాల్యాన్ని స్థిరంగా ఉంచాలంటే దాని రెండో కొలతను పెంచాల్సిన శాతం

$$= \frac{100 \times x}{100 - x}$$

ఉదాహరణలు

1. ఒక దీర్ఘ చతురస్ర చుట్టుకొలత 28 సెం.మీ., దాని కర్ణం 10 సెం.మీ. అయితే దాని వైశాల్యం ఎంత?

సమాధానం:

2 (పొడవు + వెడల్పు) = 28

$\Rightarrow$ పొడవు + వెడల్పు = 14

ఇరువైపులా వర్గం చేస్తే

పొడవు^{2} + వెడల్పు^{2} + 2 × పొడవు × వెడల్పు = 196

కాని కర్ణం^{2} = పొడవు^{2} + వెడల్పు^{2} = 10^2 = 100

$\therefore$ 100 + 2 × పొడవు × వెడల్పు = 196

$\Rightarrow$ పొడవు × వెడల్పు = 48

కాబట్టి వైశాల్యం = 48 చదరపు సెం.మీ.

2. ఒక దీర్ఘ చతురస్ర పొడవు, వెడల్పులు 3:2 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. దాని చుట్టుకొలత 600 మీటర్లు. అయితే దాని వైశాల్యం హెక్టారుల్లో ఎంత?

సమాధానం:

పొడవు = 3k మీటర్లు, వెడల్పు = 2k మీటర్లు అనుకొంటే,

చుట్టుకొలత = $2\ (3k + 2k) = 600$

$\Rightarrow 10\ k = 600$

$\Rightarrow k = 60$

$\Rightarrow$ పొడవు = 3 × 60 = 180 మీటర్లు,

వెడల్పు = 2 × 60 = 120 మీటర్లు.

వైశాల్యం = 180 × 120 = 21,600 చదరపు మీటర్లు.

= 2.16 హెక్టార్లు

3. దీర్ఘ చతురస్ర పొడవును 50% పెంచి, వెడల్పును 50% తగ్గిస్తే దాని వైశాల్యంలో వచ్చే మార్పు శాతం ఎంత?

సమాధానం:

వైశాల్యంలోని మార్పు శాతం =

$$x + y + \frac{x \times y}{100}$$

దత్తాంశం ప్రకారం

$x = +\,50,\ y = -\,50$

$\therefore$ వైశాల్యంలోని మార్పు శాతం =

$$50 - 50 - \frac{50 \times 50}{100}$$

$= -\,25$

అంటే వైశాల్యం 25% తగ్గుతుంది.

4. ఒక దీర్ఘ చతురస్ర భుజాలను కొలవడంలో ఒక దాన్ని పొరపాటుగా 5% ఎక్కువగా, మరొకదాన్ని 4% తక్కువగా కొలిచారు. అయితే దాన్ని వైశాల్యంలోని పొరపాటు శాతం ఎంత?

సమాధానం:

దత్తాంశం ప్రకారం $x = +\,5,\ \ y = -\,4$

వైశాల్యంలోని పొరపాటు శాతం =

$$x + y + \frac{x \times y}{100}$$

$$= 5 - 4 - \frac{5 \times 4}{100}$$

= + 0.8

$\therefore$ వైశాల్యంలోని పొరపాటు శాతం = + 0.8% అంటే వైశాల్యం 0.8% శాతం ఎక్కువగా నమోదవుతుంది.

5. ఒక దీర్ఘచతురస్ర చుట్టుకొలత 60 మీటర్లు, వైశాల్యం 200 చదరపు మీటర్లు అయితే దాని పొడవు, వెడల్పుల మధ్య సంబంధం?

సమాధానం:

2 (పొడవు + వెడల్పు) = 60

$\Rightarrow$ పొడవు + వెడల్పు = 30 $\rightarrow (1)$

$a - b = \sqrt{(a + b)^2 - 4ab}$ అనే సూత్రాన్ని అనుసరించి పొడవు – వెడల్పు =

$$\sqrt{30^2 - 4 \times 200} = 10 \quad \rightarrow (2)$$

(1) & (2)ల నుంచి పొడవు = 20 మీటర్లు

వెడల్పు = 10 మీటర్లు

$\therefore$ పొడవు = 2 × వెడల్పు

అంటే పొడవు వెడల్పునకు రెట్టింపు.

వైశాల్యాలు-2

చతురస్రం

1. వైశాల్యం = భుజం × భుజం = $(\text{భుజం})^2$
   చుట్టుకొలత = 4 × భుజం

2. కర్ణం = $\sqrt{2}$ × భుజం

3. వైశాల్యం= $\frac{(\text{కర్ణం})^2}{2} = \frac{(\text{చుట్టు కొలత})^2}{16}$

4. చుట్టుకొలత = $2\sqrt{2}$ × కర్ణం

5. ఒక చతురస్ర భుజంలో $x\%$ మార్పు వస్తే దాని కర్ణంలో, చుట్టుకొలతలో కూడా $x\%$ మార్పు వస్తుంది.

6. ఒక చతురస్ర భుజంలో $x\%$ మార్పు వస్తే దాని వైశాల్యంలో వచ్చే మార్పు శాతం = $2x + \frac{x^2}{100}$

ఉదాహరణలు

1. రెండు చతురస్రాల చుట్టుకొలతలు 40 సెం.మీ., 32 సెం.మీ. ఈ రెండు చతురస్రాల వైశాల్యాల భేదానికి సమానమైన వైశాల్యం గల చతురస్ర చట్టుకొలత ఎంత?

   సమాధానం:

   రెండు చతురస్రాల భుజాలను b_1, b_2 అనుకుంటే అప్పుడు

   $4b_1 = 40 \quad 4b_2 = 32$

   $\Rightarrow b_1 = 10, \; b_2 = 8$

   వీటి వైశాల్యాల భేదం = $10^2 - 8^2$

   $= 36$ స్క్వేర్ సెం.మీ.

   36 స్క్వేర్ సెం.మీ. వైశాల్యం గల చతురస్ర భుజం = $\sqrt{36} = 6$ సెం.మీ.

   దీని చుట్టుకొలత = 4 × 6

   = 24 సెం.మీ.

2. రెండు చతురస్రాల కర్ణాలు 2 : 5 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. అయితే వాటి వైశాల్యాల నిష్పత్తి, చుట్టుకొలతల నిష్పత్తి కనుగొనండి.

   సమాధానం:

రెండు చతురస్రాల కర్ణాలను d_1, d_2, వైశాల్యాలను A1, A2, చుట్టుకొలతలను

p_1, p_2, అనుకుంటే

$A_1 = \frac{d_1^2}{2} \quad A_2 = \frac{d_2^2}{2}$

$\Rightarrow A_1 : A_2 = d_1^2 : d_2^2 = 2^2 : 5^2$

$= 4 : 25$

$\therefore$ వాటి వైశాల్యాల నిష్పత్తి = 4 : 25

అదేవిధంగా $p_1 = 2\sqrt{2}d_1,\ p_2 = 2\sqrt{2}d_2$

$\Rightarrow p_1 : p_2 = d_1 : d_2$

$= 2 : 5$

వాటి చుట్టుకొలతల నిష్పత్తి = 2 : 5

3. ఒక చతురస్ర భుజాన్ని 25% తగ్గిస్తే దాని చుట్టుకొలతలో, వైశాల్యంలో వచ్చే మార్పు శాతం ఎంత?

సమాధానం:

ఇక్కడ $x = -25$

చుట్టుకొలతలో వచ్చే మార్పు శాతం =

-25

అంటే చుట్టుకొలత కూడా 25% తగ్గుతుంది. వైశాల్యంలో వచ్చే మార్పు శాతం = $2x + \frac{x^2}{100}$

$= 2 \times (-25) + \frac{(-25)^2}{100}$

$= -43.75$

అంటే వైశాల్యం 43.75% తగ్గుతుంది.

4. 5 మీటర్ల 44 సెం.మీ., 3 మీటర్ల 74 సెం.మీ. కొలతలు గల ఒక గదిలో చతురస్రాకార బండలు వేయాలంటే కావాల్సిన కనిష్ట బండల సంఖ్య?

సమాధానం:

గది కొలతలు = 544 సెం.మీ., 374 సెం.మీ.

బండల సంఖ్య కనిష్టంగా ఉండాలంటే బండ పరిమాణం గరిష్టంగా ఉండాలి.

బండ గరిష్ట పరిమాణం = 544, 374ల గ.సా.భా

= 34 సెం.మీ.

అప్పుడు అవసరమయ్యే బండల సంఖ్య =

గది వైశాల్యం

బండ వైశాల్యం

$= \frac{544 \times 374}{34 \times 34}$

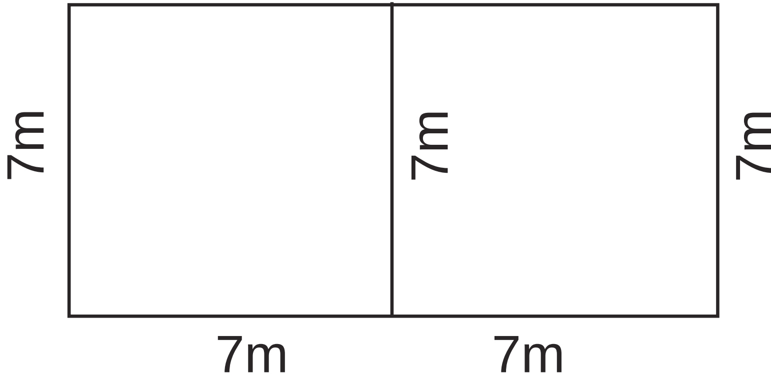
= 176

$\therefore$ కావాల్సిన కనిష్ట బండల సంఖ్య = 176

5. దీర్ఘ చతురస్రాకారంలో ఉన్న ఒక గదిని 7 మీ. పొడవు గల గీతతో రెండు సమాన చతురస్రాకార గదులుగా విభజించగలిగితే ఆ గది వైశాల్యం?

సమాధానం:

దత్తాంశాన్ని పటం రూపంలో గీస్తే



పై పటం నుంచి గది పొడవు = 7 + 7

= 14 మీ.

వెడల్పు = 7 మీ.

$\therefore$ వైశాల్యం = 14×7

= 98 చదరపు మీటర్లు

వైశాల్యాలు-3

వృత్త వైశాల్యం

ఒక వృత్తం వ్యాసార్ధం = r, వ్యాసం = d అనుకుంటే

i) $d = 2r$

ii) వృత్త వైశాల్యం $(A) = \pi r^2$ లేదా $\frac{\pi d^2}{4}$

iii) వృత్త పరిధి లేదా వృత్త చుట్టుకొలత $(p) = 2\pi r$ లేదా πd

అంటే వృత్త పరిధి వ్యాసార్ధానికి 2π రెట్లు లేదా వ్యాసానికి π రెట్లు.

iv) $A = \frac{p^2}{4\pi}$

v) రెండు వృత్తాల వ్యాసార్ధాల నిష్పత్తి = $a:b$ అయితే వాటి పరిధుల నిష్పత్తి = $a : b$

వైశాల్యాల నిష్పత్తి = $a^2 : b^2$

vi) ఒక వృత్త వ్యాసార్ధంలో $x\%$ మార్పు వస్తే, దాని చుట్టుకొలతలో మార్పు శాతం = x

వైశాల్యంలోని మార్పు శాతం

$$= 2x + \frac{x^2}{100}$$

vii) 'r' వ్యాసార్ధం గల వృత్తంలో ఒక చతురస్రాన్ని అంతర్లిఖిస్తే ఆ చతురస్ర వైశాల్యం = $2r^2$

వృత్తానికి, చతురస్రానికి మధ్య గల ప్రదేశం వైశాల్యం = $(\pi - 2)r^2$

viii) 'l' భుజంగా గల ఒక చతురస్రంలో వృత్తాన్ని అంతర్లిఖిస్తే, ఆ వృత్త వ్యాసార్ధం $(r) = \frac{l}{2}$

వృత్త వైశాల్యం = $\frac{\pi l^2}{4}$

చతురస్రానికి, వృత్తానికి మధ్య గల ప్రదేశం వైశాల్యం = $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)l^2$

ఉదాహరణలు

1. ఒక అర్ధ వృత్తం వైశాల్యం 77 చదరపు సెం.మీ. అయితే దాని వ్యాసం ఎంత?

సమాధానం:

వృత్త వ్యాసం = 'd' సెం.మీ. అనుకుంటే

వృత్త వైశాల్యం = $\frac{\pi d^2}{4}$

అర్ధ వృత్త వైశాల్యం $= \frac{\pi d^2}{8} = 77$

$\Rightarrow \quad d^2 = 77 \times 8 \times \frac{7}{22}$

$\Rightarrow \quad d = 14$ సెం.మీ.

$\therefore$ వృత్త వ్యాసం = 14 సెం.మీ.

2. ఒక కారు చక్రాల వ్యాసం 70 సెం.మీ. అయితే ఆ కారు చక్రాలు నిమిషానికి ఎన్ని చుట్లు తిరిగితే కారు 66 కి.మీ/గంట వేగంతో ప్రయాణం చేస్తుంది?

సమాధానం:

కారు ఒక్క నిమిషంలో ప్రయాణించాల్సిన దూరం $= \frac{66 \times 1000}{60}$ మీటర్లు

= 1100 మీటర్లు

కారు చక్రం చుట్టుకొలత = πd

$= \frac{22}{7} \times 70$

= 220 సెం.మీ. = 2.2 మీటర్లు

$\therefore$ నిమిషానికి కారు చక్రాలు తిరగాల్సిన చుట్ల సంఖ్య = $\frac{1100}{2.2} = 500$

$\therefore$ సమాధానం : 500

3. ఒక వృత్త వ్యాసార్థాన్ని 50% తగ్గిస్తే, దాని చుట్టుకొలత, వైశాల్యాలు ఎంత శాతం తగ్గుతాయి?

సమాధానం:

$x = -50$

చుట్టుకొలతలోని తగ్గుదల = 50%

వైశాల్యంలోని తగ్గుదల

$= 2x + \frac{x^2}{100}$ శాతం

$2(-50) + \frac{(-50)^2}{100} = -75\%$

$\therefore$ వృత్త వైశాల్యం 75% తగ్గుతుంది. చుట్టుకొలత 50% తగ్గుతుంది.

4. ఒక వృత్త పరిధి ఒక చతురస్ర చుట్టుకొలతలు సమానం అయితే వాటి వైశాల్యాల నిష్పత్తి?

సమాధానం:

వృత్త వ్యాసార్ధం = r, చతురస్ర భుజం = l అనుకుంటే $2\pi r = 4l$

$\Rightarrow l = \frac{\pi r}{2}$

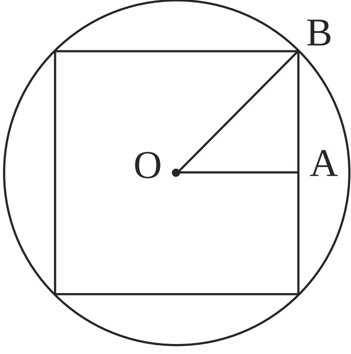
వాటి వైశాల్యాల నిష్పత్తి = $\pi r^2 : l^2$

$= \pi r^2 : \left(\frac{\pi r}{2}\right)^2 = \pi r^2 : \frac{\pi^2 r^2}{4}$

$\therefore$ సమాధానం : $4 : \pi$

5. ఒక చతురస్రం అంతర వృత్తం, పరివృత్తాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి?

సమాధానం:



చతురస్ర భుజం = $2x$ అనుకుంటే

అంతరవృత్త వ్యాసార్ధం $= OA = x$

పరివృత్త వ్యాసార్ధం = చతురస్ర కర్ణంలో సగం $= \frac{\sqrt{2} \times 2x}{2} = \sqrt{2}x$

అంతర, పరివృత్తాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి

$= \pi x^2 : \pi(\sqrt{2}x)^2$

$= \pi x^2 : 2\pi x^2$

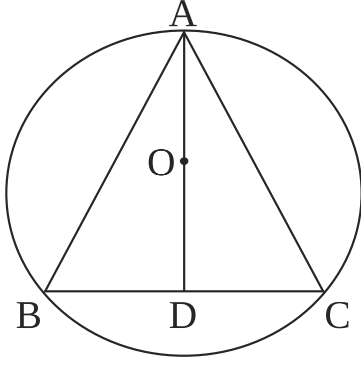
$= 1 : 2$

$\therefore$ సమాధానం : $1 : 2$

అదేవిధంగా వాటి చుట్టుకొలతల నిష్పత్తి $= 1 : \sqrt{2}$

6. ఒక వృత్తంలో సమబాహు త్రిభుజం అంతర్లిఖించినప్పుడు ఆ వృత్త వ్యాసార్ధం 'r' అయితే సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యం ఎంత?

సమాధానం:



వృత్త కేంద్రం 'O', ABC ఒక సమబాహు త్రిభుజం. AD, BC పైకి గీసిన ఉన్నతి వృత్త వ్యాసార్ధం 'r' అనుకుంటే...

$$OA = r$$

$$OD = \frac{OA}{2} = \frac{r}{2}$$

∴ సమబాహు త్రిభుజ ఉన్నతి

$$(h) = OD = OA + OD$$

$$= r + \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}$$

సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{h^2}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{\left(\frac{3r}{2}\right)^2}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}\,r^2}{4}$$

∴ సమాధానం : $= \frac{3\sqrt{3}\,r^2}{4}$

అలాగే వృత్తానికి, సమబాహు త్రిభుజానికి మధ్య గల ప్రదేశం వైశాల్యం =

$$\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)r^2$$

7. 18 సెం.మీ., 14 సెం.మీ. కొలతలు గల దీర్ఘచతురస్రం లోపల గీయగల అతిపెద్ద వృత్తం వైశాల్యం?

సమాధానం:

ఇచ్చిన దీర్ఘచతురస్రం లోపల గీయగల అతిపెద్ద వృత్తం వ్యాసం $(d) = 14$ సెం.మీ.

ఆ వృత్త వైశాల్యం $= \frac{\pi d^2}{4}$

$= \frac{22}{7} \times \frac{14 \times 14}{4} = 154$

$\therefore$ సమాధానం : 154 చదరపు సెం.మీ.

మరికొన్ని ముఖ్య విషయాలు:

1. ఒక సమబాహు త్రిభుజం, ఒక చతురస్రం, ఒక వృత్తం సమాన చుట్టుకొలతలను కలిగి ఉంటే వాటి వైశాల్యాల మధ్య సంబంధం కింది విధంగా ఉంటుంది.

   $T < S < C$

   T - సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యం

   S - చతురస్ర వైశాల్యం

   C - వృత్త వైశాల్యం

   అంటే అన్నింటికంటే వృత్త వైశాల్యం ఎక్కువ.

2. ఒక దీర్ఘ చతురస్రం, ఒక చతురస్రం సమాన చుట్టుకొలతలను కలిగి ఉంటే చతురస్ర వైశాల్యం దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం కంటే ఎక్కువ.

3. ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం, ఒక సమబాహు త్రిభుజం సమాన చుట్టుకొలతలను కలిగి ఉంటే సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యం సమద్విబాహు త్రిభుజ వైశాల్యం కంటే ఎక్కువ.

4. ఒక విషమ బాహు త్రిభుజం, ఒక సమబాహు త్రిభుజం సమాన చుట్టుకొలతలను కలిగి ఉంటే సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యం, విషమ బాహు త్రిభుజ వైశాల్యం కంటే ఎక్కువ.

లాజికల్‌డయాగ్రమ్స్-1

పార్ట్-1

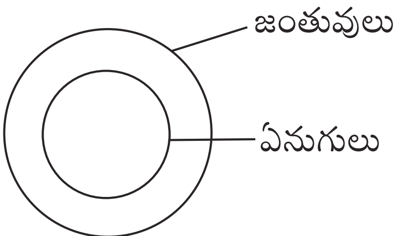
ఒక వ్యక్తిలోని తార్కిక శక్తిని, వేగంగా నిర్ణయాలు తీసుకునే శక్తిని పరిశీలించడానికి ఈ ప్రశ్నలు ఎంతగానో తోడ్పడతాయి.

గ్రూప్-2, గ్రూప్-1 ప్రిలిమ్స్, సివిల్స్ తదితర కాంపిటీటివ్ పరీక్షల్లో లాజికల్ డయాగ్రమ్స్‌పై తరచుగా ప్రశ్నలు వస్తున్నాయి.

సాధారణంగా ఈ అంశంలో మూడు కుటుంబాలు ఇస్తారు. అవి ఏమైనా కావచ్చు. ఉదాహరణకు పురుషులు, మహిళలు, ఉద్యోగులు, డాక్టర్లు, నిరక్షరాస్యులు, జంతువులు, పులులు, ఏనుగులు, సహజసంఖ్యలు, సరిసంఖ్యలు మొదలైనవి.

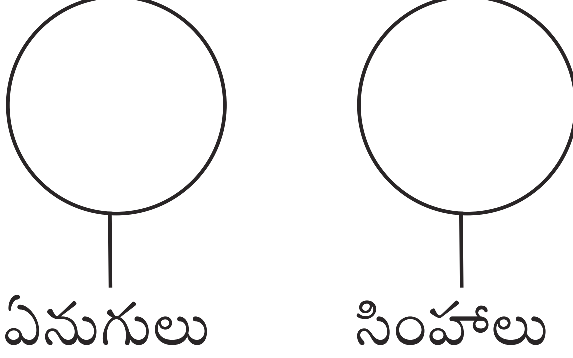
ఇలా ఇచ్చిన మూడు కుటుంబాల మధ్య సంబంధం ఏ విధంగా ఉందో మనం కనుక్కోవాలి. ఇక్కడ ఒక్కో కుటుంబాన్ని ఒక వృత్తం ద్వారా సూచిస్తాం. ఒక కుటుంబం మరో కుటుంబంలో భాగమైనప్పుడు ఒక వృత్తాన్ని మరో వృత్తం లోపల సూచిస్తాం.

1. ఉదాహరణకు ఏనుగులు, జంతువులు అని రెండు కుటుంబాలు ఇచ్చినప్పుడు; ఏనుగులు ఒక కుటుంబం; జంతువులు మరో కుటుంబం. కానీ ఇక్కడ ఏనుగులు అనే కుటుంబం, జంతువులు అనే కుటుంబంలో భాగం కాబట్టి దీనికి సంబంధించిన లాజికల్ డయాగ్రమ్‌ను ఈ విధంగా సూచించవచ్చు.



2. ఏనుగులు, సింహాలు

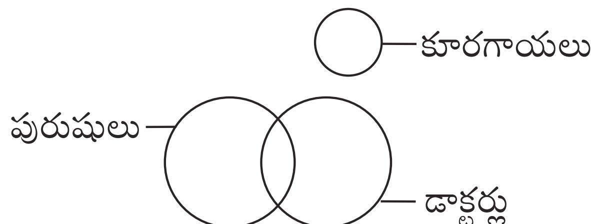
ఏనుగులు, సింహాలు రెండు వేర్వేరు కుటుంబాలు. ఒక దానికి ఒకటి కలవవు. కాబట్టి దీనిని కింది విధంగా సూచించవచ్చు.



3. మహిళలు, ఉద్యోగులు

మహిళలు ఒక కుటుంబం, ఉద్యోగులు మరో కుటుంబం. మహిళలందరూ ఉద్యోగులు కారు. అదే విధంగా ఉద్యోగులందరూ మహిళలు కారు. కానీ మహిళల్లో కొంతమంది ఉద్యోగులున్నారు, ఉద్యోగులలో కొంతమంది మహిళలున్నారు. కాబట్టి దీనిని కింది చిత్రం ద్వారా సూచించవచ్చు.

- ఇప్పటి వరకు అవగాహన కోసం రెండు కుటుంబాల గురించే తెలుసుకొన్నాం. కానీ పరీక్షల్లో మూడు కుటుంబాలు ఇస్తారు.
- వృత్త పరిమాణాన్ని ఆ కుటుంబ పరిమా ణంతో పోల్చవద్దు. ఉదాహరణకు మగవారు, డాక్టర్లు, కూరగాయలు ఇస్తే పురుషులందరూ డాక్టర్లు కారు, డాక్టర్లందరూ పురుషులు కారు. కానీ పురుషుల్లో కొంత మంది డాక్టర్లుంటారు, అలాగే డాక్టర్లలో కొంత మంది పురుషులుం టారు. డాక్టర్లు, పురుషులు అనే రెండు కుటుం బాలకు సంబంధం లేని మరో కుటుంబం కూరగాయలు. వీటిని కింది చిత్రం ద్వారా చూపించవచ్చు.

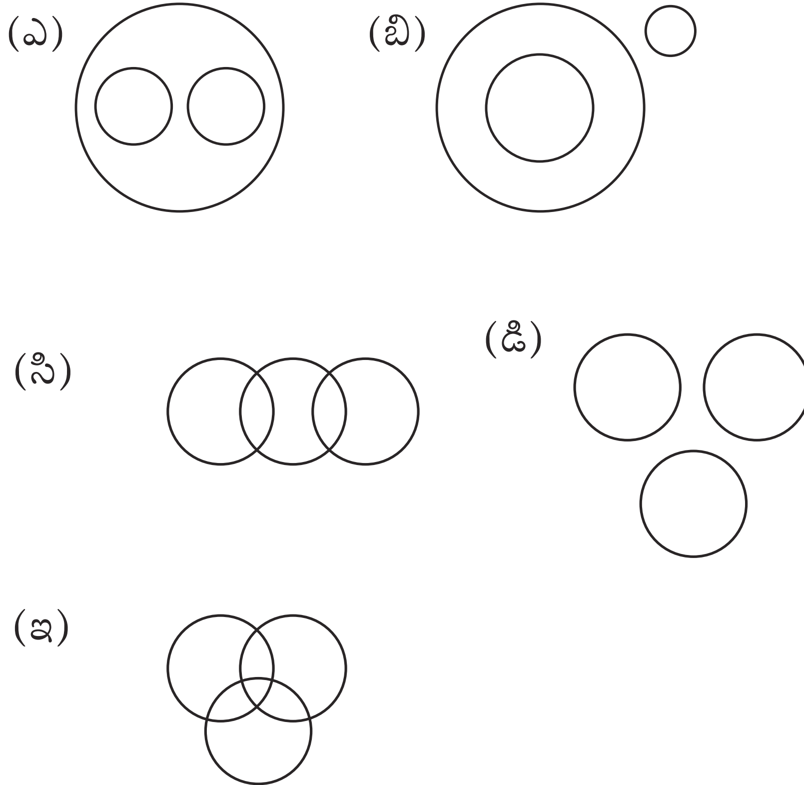


పురుషులు, డాక్టర్లను సూచించే వృత్తాలతో పోలిస్తే కూరగాయలను సూచించే వృత్తం చిన్నదిగా ఉంది. అంతమాత్రాన ఈ కుటుంబ పరిమాణం తక్కువ అనుకోవద్దు.

- మూడు కుటుంబాలు ఇచ్చినప్పుడు వాటి మధ్య ఉన్న సంబంధాన్ని ముందుగా కనుక్కోవాలి. ఏది ఎందులో భాగం, ఏయే కుటుంబాలు ఏ మాత్రం సంబంధం లేకుండా ఉన్నాయనే విషయాలు తెలుసుకోవాలి. వాటి కింద ఇచ్చిన చిత్రాల్లో సరైన దానిని గుర్తించాలి.

కొన్ని ఉదాహరణలు

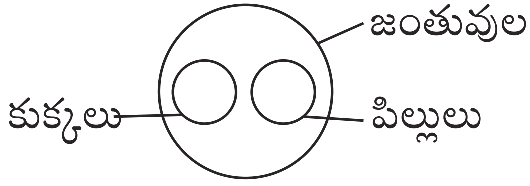
సూచనలు : కింద ఐదు లాజికల్ చిత్రాలు ఉన్నాయి. వాటి కింద ఇచ్చిన పదాలు లేదా కుటుం బాల మధ్య ఏ సంబంధం ఉందో కనుక్కొని దానికి సరైన చిత్రాన్ని గుర్తించండి. (వృత్త పరిమాణం, ఆ పదాలు లేదా కుటుంబాల పరిమాణాన్ని సూచించదు.)



1) జంతువులు, కుక్కలు, పిల్లులు

కుక్కలు, పిల్లులు రెండూ జంతువుల్లో భాగమే. కానీ ఈ రెండు వేర్వేరు జాతులు.

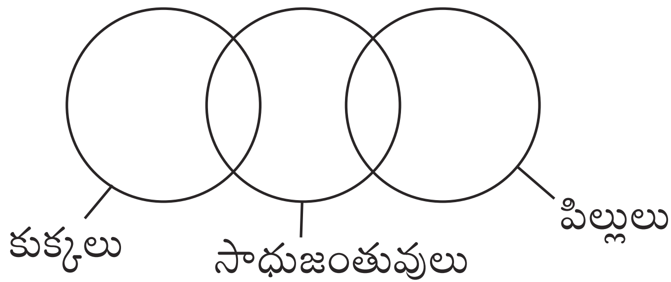
కాబట్టి సమాధానం (ఎ)



2)సాధు జంతువులు, కుక్కలు, పిల్లులు

కుక్కలు, పిల్లులన్నీ సాధుజంతువులు కావు. కుక్కల్లో కొన్ని మాత్రమే సాధు జంతువులు. అలాగే పిల్లుల్లో కొన్ని మాత్రమే సాధు జంతువులు. కుక్కలు, పిల్లులు వేర్వేరు కుటుంబాలు.

కాబట్టి సమాధానం (సి)

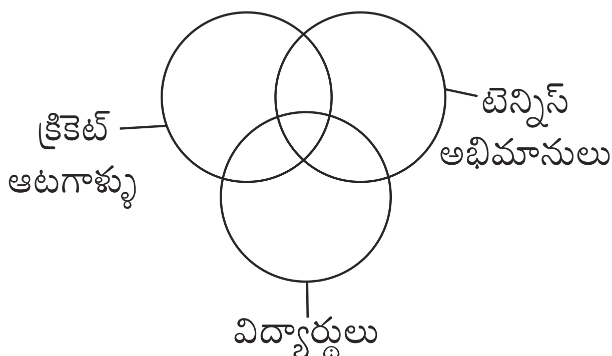


3)క్రికెట్ ఆటగాళ్లు, టెన్నిస్ అభిమానులు, విద్యార్థులు.

క్రికెట్ ఆటగాళ్లలో కొంతమంది టెన్నిస్ అభిమానులు ఉంటారు, విద్యార్థులుంటారు.

టెన్నిస్ అభిమానుల్లో కొంతమంది క్రికెట్ ఆటగాళ్లు ఉంటారు, విద్యార్థులుంటారు.

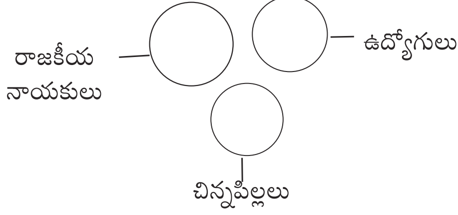
సమాధానం (ఇ)



4)రాజకీయనాయకులు, ఉద్యోగులు, చిన్నపిల్లలు

పై మూడు కూడా ఒకదానికి ఒకటి సంబంధం లేనివి.

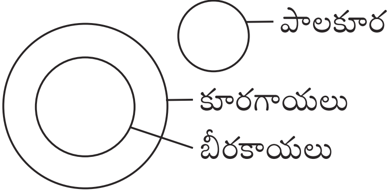
కాబట్టి సమాధానం (డి)



5)కూరగాయలు, బీరకాయలు, పాలకూర

బీరకాయలు కూరగాయల్లో భాగం. పాలకూర ఈ రెండింటికి సంబంధం లేనిది.

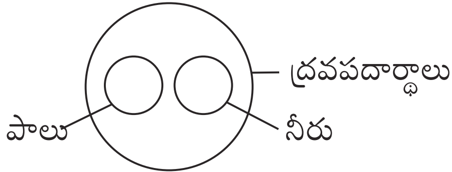
కాబట్టి సమాధానం (బి)



6)పాలు, నీరు, ద్రవ పదార్థాలు

పాలు, నీరు రెండూ కూడా ద్రవ పదార్థాల్లో భాగమే. కానీ పాలు, నీరు అనేవి రెండు వేర్వేరు.

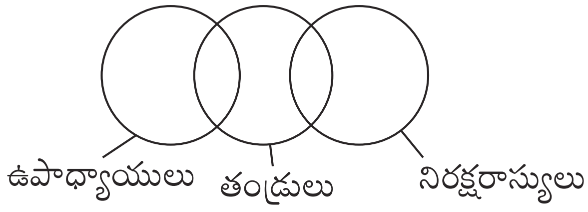
కాబట్టి సమాధానం (ఎ)



7)తండ్రులు, ఉపాధ్యాయులు, నిరక్షరాస్యులు

ఉపాధ్యాయులలో కొంతమంది తండ్రులు. అదే విధంగా నిరక్షరాస్యుల్లో కొంతమంది తండ్రులు. కానీ ఉపాధ్యాయులు, నిరక్షరా స్యులు అనేవి ఒకదానికొకటి సంబంధం లేనివి.

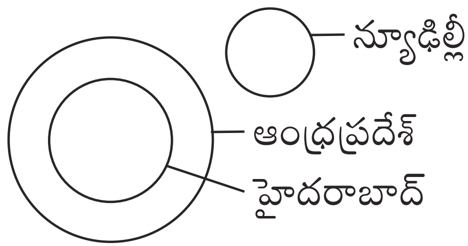
కాబట్టి సమాధానం (సి)



8)ఆంధ్రప్రదేశ్, హైదరాబాద్, న్యూఢిల్లీ

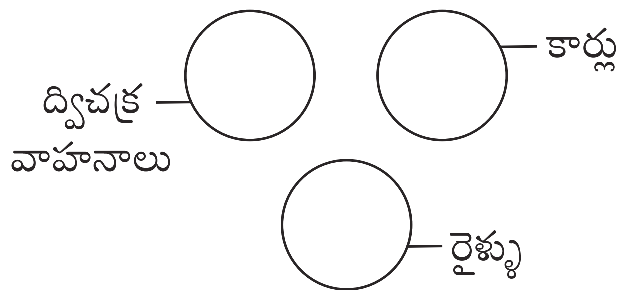
హైదరాబాద్ ఆంధ్రప్రదేశ్‌లో భాగం. కానీ న్యూఢిల్లీ ఈ రెండింటికి సంబంధం లేనిది.

కాబట్టి సమాధానం (బి)



9)ద్విచక్ర వాహనాలు, కార్లు, రైళ్లు

మూడూ కూడా ఒకదానికొకటి సంబంధం లేనివి. కాబట్టి సమాధానం (డి)



లాజికల్‌డయాగ్రమ్ స్-2

పార్ట్-2

గ్రూప్ 2, సివిల్స్ తదితర కాంపిటీటివ్ పరీక్షల్లో లాజికల్ డయాగ్రమ్స్‌పై ప్రశ్నలు వస్తున్నాయి.

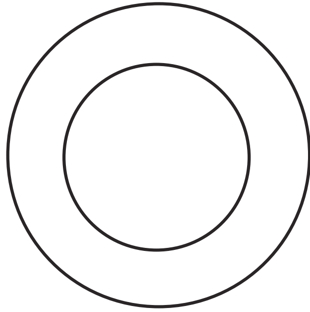
వీటిపై ప్రశ్న వచ్చినప్పుడు ముందు ప్రశ్నను జాగ్రత్తగా గమనించండి. ఇచ్చిన మూడు పదాలు లేదా కుటుంబాల మధ్య సంబంధం ఏ విధంగా ఉందో పరిశీలించండి. వాటి మధ్య సంబంధాలు కింది విధంగా ఉండవచ్చు.

- **ఒకటి మరొకదానిలో అంతర్భాగం కావచ్చు.**

ఉదా :

(1) హైదరాబాద్, జూబ్లీహిల్స్

(2) ఆటలు, హాకీ

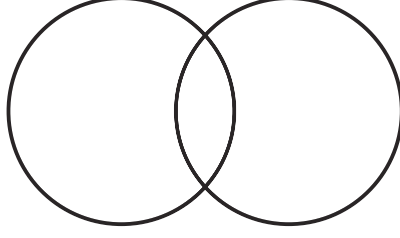


- **మొదటిది రెండోదానిలో కొంతభాగం, రెండోది మొదటిదానిలో కొంతభాగం కావచ్చు.**

ఉదా :

1) మహిళలు, అక్షరాస్యులు

2) వివాహితులు, పురుషులు

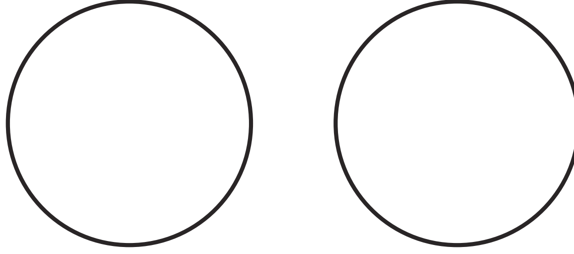


- **ఒకదానికొకటి ఏమాత్రం సంబంధం లేకుండా ఉండోచ్చు.**

ఉదా : 1) కూరగాయలు, ఆకుకూరలు

2) ధనవంతులు, పేదవారు

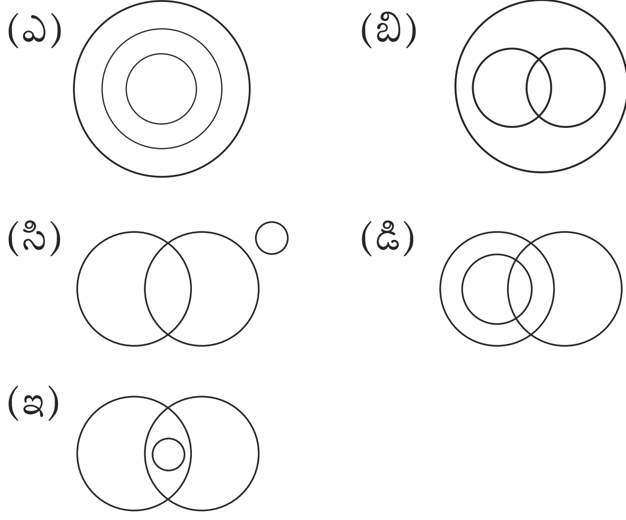
3) మహిళలు, పురుషులు



గత సంచికలో కొన్ని లాజికల్ చిత్రాలను ఇచ్చాం. ఇప్పుడు మరికొన్ని చిత్రాలను పరిశీలిద్దాం.

కొన్ని ఉదాహరణలు

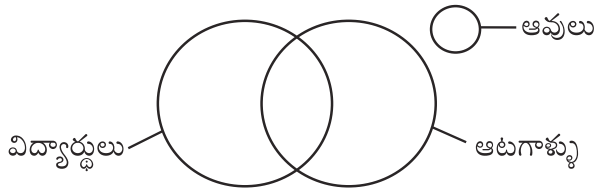
సూచనలు: కింద ఐదు లాజికల్ చిత్రాలు ఉన్నాయి. వాటి కింద ఇచ్చిన పదాలు లేదా కుటుంబాల మధ్య ఏ సంబంధం ఉందో కనుక్కొని దానికి సరైన చిత్రాన్ని గుర్తించండి. (వృత్త పరిమాణం, ఆ పదా లు లేదా కుటుంబాల పరిమాణాన్ని సూచించదు.)



1)విద్యార్థులు, ఆటగాళ్లు, ఆవులు

విద్యార్థుల్లో కొంతమంది ఆటగాళ్ళు ఉంటా రు. అలాగే ఆటగాళ్ళలో కొంతమంది విద్యా ర్థులు ఉంటారు. కానీ ఆవులు అనేది విద్యార్థు లకు, ఆటగాళ్ళకు సంబంధం లేనిది.

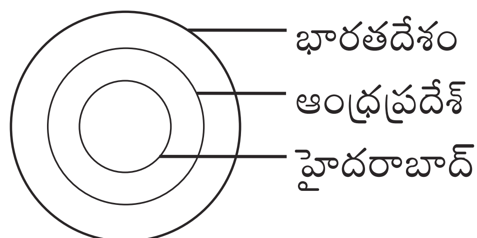
కాబట్టి సమాధానం (సి)



2)భారతదేశం, ఆంధ్రప్రదేశ్, హైదరాబాద్

భారతదేశంలో ఒక భాగం ఆంధ్రప్రదేశ్. ఆంధ్రప్రదేశ్‌లో ఒక భాగం హైదరాబాద్.

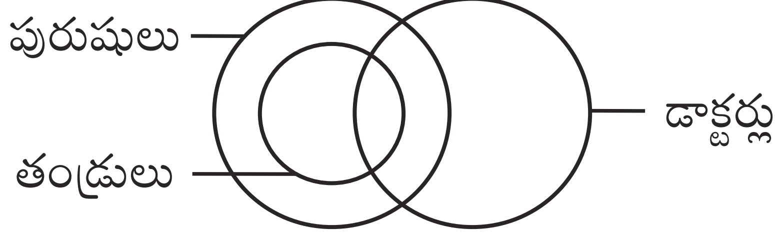
కాబట్టి సమాధానం (ఎ)



3)పురుషులు, తండ్రులు, డాక్టర్లు

తండ్రులందరూ పురుషులే. కొంతమంది పురు షులు, కొంతమంది తండ్రులు డాక్టర్లుగా ఉన్నారు.

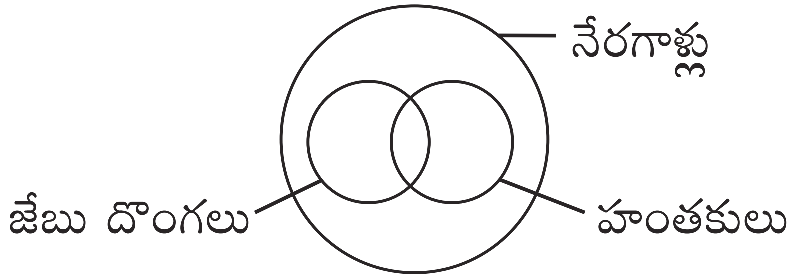
కాబట్టి సమాధానం (డి)



4)జేబు దొంగలు, హంతకులు, నేరగాళ్లు

జేబు దొంగలందరూ నేరగాళ్లే. అలాగే హంత కులందరూ నేరగాళ్లే. జేబు దొంగల్లో కొంత మంది హంతకులుంటారు. హంతకుల్లో కొంత మంది జేబు దొంగలుంటారు.

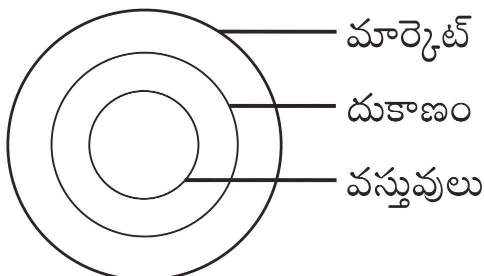
కాబట్టి సమాధానం (బి)



5)వస్తువులు, దుకాణం, మార్కెట్

మార్కెట్‌లో దుకాణాలుంటాయి. దుకాణంలో వస్తువులుంటాయి.

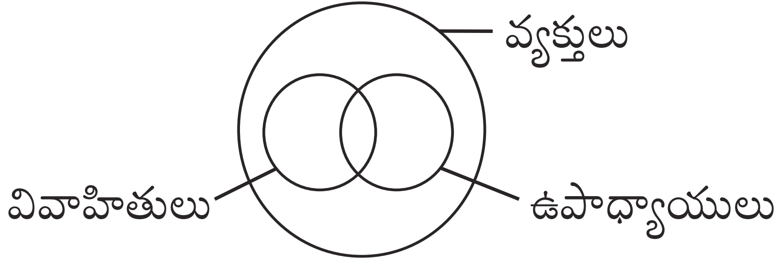
కాబట్టి సమాధానం (ఎ)



6)వ్యక్తులు, వివాహితులు, ఉపాధ్యాయులు

వివాహితులు అందరూ వ్యక్తుల్లో భాగమే. అలాగే ఉపాధ్యాయులు అందరూ కూడా వ్యక్తుల్లో భాగమే. వివాహితుల్లో కొంత మంది ఉపాధ్యాయులుంటారు. అలాగే ఉపాధ్యా యుల్లో కొంత మంది వివాహితులుంటారు.

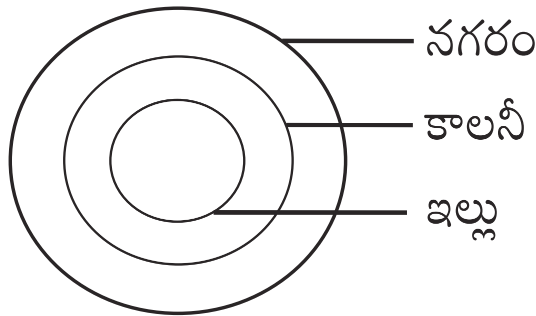
కాబట్టి సమాధానం (బి)



7)నగరం, కాలనీ, ఇల్లు

నగరం లోపల కాలనీ ఉంటుంది. కాలనీ లోపల ఇల్లు ఉంటుంది.

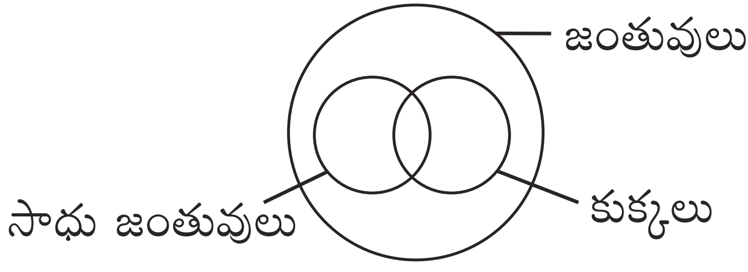
కాబట్టి సమాధానం (ఎ)



8)జంతువులు, సాధు జంతువులు, కుక్కలు

సాధు జంతువులన్నీ జంతువుల్లో భాగమే. అదేవిధంగా కుక్కలన్నీ కూడా సాధు జంతు వుల్లో భాగమే. సాధు జంతువుల్లో కొన్ని కుక్కలుంటాయి. కుక్కల్లో కొన్ని సాధు జంతు వులుంటాయి.

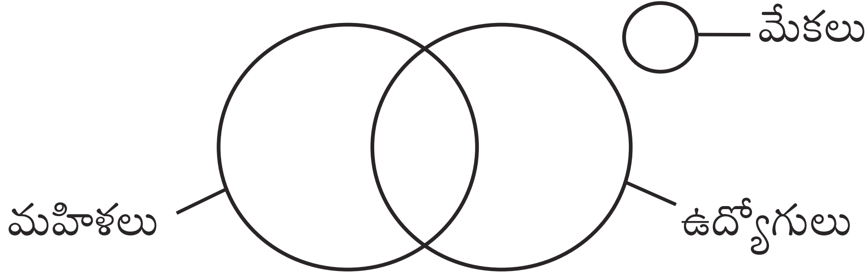
కాబట్టి సమాధానం (బి)



9)మహిళలు, ఉద్యోగులు, మేకలు

మహిళల్లో కొంతమంది ఉద్యోగులుంటారు. అలాగే ఉద్యోగుల్లో కొంతమంది మహిళలుం టారు. మేకలు అనేవి పైరెండింటికీ ఏమాత్రం సంబంధం లేదు.

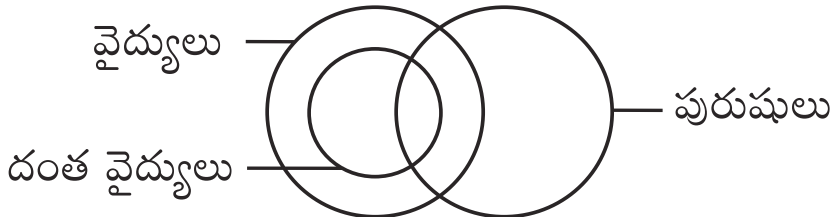
కాబట్టి సమాధానం (సి)



10) వైద్యులు, దంతవైద్యులు, పురుషులు

దంతవైద్యులందరూ వైద్యుల్లో భాగమే. వైద్యు ల్లో కొంతమంది పురుషులుంటారు. అలాగే దంత వైద్యుల్లో కొంత మంది పురుషులుం టారు.

కాబట్టి సమాధానం (డి)

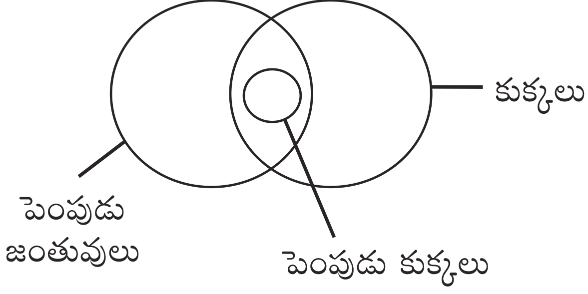


11) పెంపుడు జంతువులు, పెంపుడు కుక్కలు, కుక్కలు

పెంపుడు కుక్కలన్నీ పెంపుడు జంతువులే. పెంపుడు కుక్కలన్నీ కుక్కలే. పెంపుడు జంతు వుల్లో కొన్ని

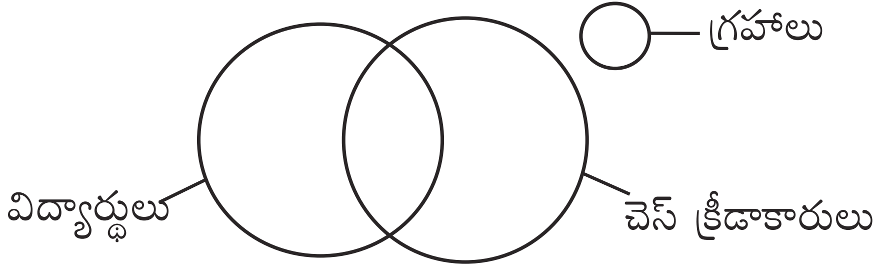
కుక్కలుంటాయి.

కాబట్టి సమాధానం (ఇ)



12) విద్యార్థులు, చెస్ క్రీడాకారులు, గ్రహాలు

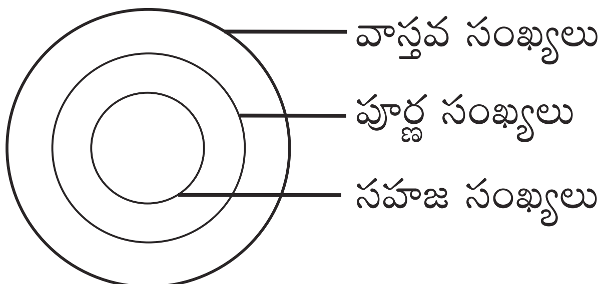
విద్యార్థుల్లో కొంతమంది చెస్ క్రీడాకారులుం టారు. అలాగే చెస్ క్రీడాకారుల్లో కొంతమంది విద్యార్థులుంటారు. ఈ రెండింటికీ సంబంధం లేనిది గ్రహాలు. కాబట్టి సమాధానం (సి)



13) వాస్తవ సంఖ్యలు, పూర్ణ సంఖ్యలు, సహజ సంఖ్యలు

సహజ సంఖ్యలన్నీ పూర్ణ సంఖ్యలే. అలాగే పూర్ణ సంఖ్యలన్నీ వాస్తవ సంఖ్యలే.

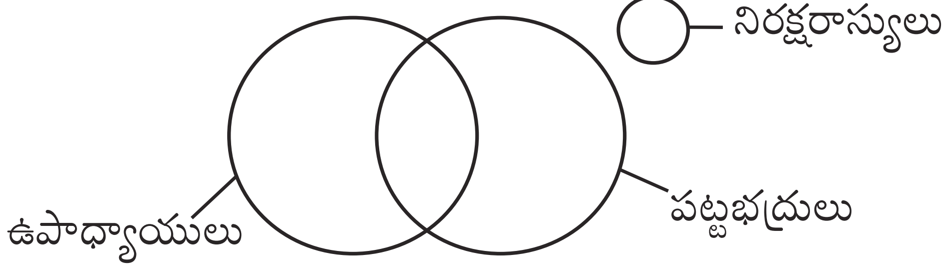
కాబట్టి సమాధానం (ఎ)



14) ఉపాధ్యాయులు, పట్టభద్రులు (Graduates), నిరక్షరాస్యులు

ఉపాధ్యాయుల్లో కొంతమంది పట్టభద్రులు ఉంటారు. అలాగే పట్టభద్రుల్లో కొంతమంది ఉపాధ్యాయులు ఉంటారు. ఈ రెండు కుటుం బాలకు చెందనివారు నిరక్షరాస్యులు.

కాబట్టి సమాధానం (సి)



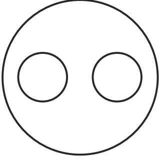
లాజికల్‌డయాగ్రమ్స్-3

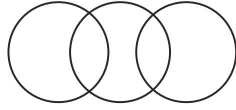
లాజికల్ డయాగ్రమ్స్‌పై గతంలో వచ్చిన ప్రశ్నలు

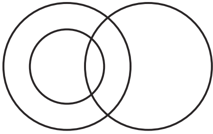
సమాజం, సమాజంలో గల పలు అంశాలపై కనీస పరిజ్ఞానం ఉన్న ఏ అభ్యర్థి అయినా కొంచెం కామన్‌సెన్స్‌తో మార్కులు సాధించే అంశం ఇది.

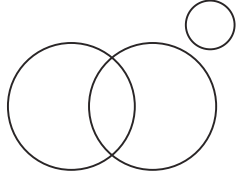
లాజికల్ డయాగ్రమ్‌లోని రకాలు, వీటిపై వచ్చే వివిధ ప్రశ్నల గురించి గతంలో చర్చించాం. ఇప్పటి వరకు పోటీ పరీక్షల్లో ఈ అంశంపై వచ్చిన ప్రశ్నలను పరిశీలిద్దాం.

1. ఏనుగులు, నక్కలు, జంతువులను కింది వాటిలో ఏ చిత్రం సూచిస్తుంది?


(ఎ)


(బి)

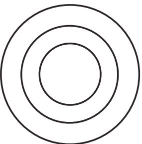

(సి)

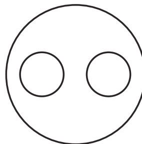

(డి)

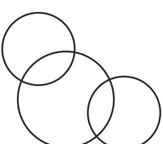
సమాధానం (ఎ)

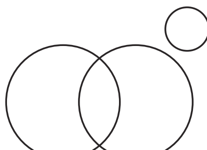
ఏనుగులు, నక్కలు ఒకదానికి ఒకటి సంబంధం లేనివి. కానీ ఈ రెండూ కూడా జంతువుల్లో భాగమే.

2. కింది లాజికల్ డయాగ్రమ్‌లలో ఏది క్యారెట్, ఆహారం, కూరగాయలను సూచిస్తుంది?


(ఎ)


(బి)

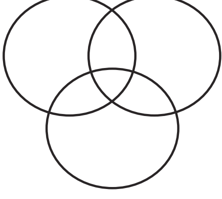

(సి)


(డి)

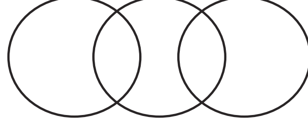
సమాధానం (ఎ)

క్యారెట్‌లన్నీ కూరగాయల్లో భాగం. కూర గాయలన్నీ ఆహారంలో భాగం.

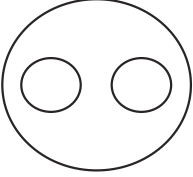
3. కింద ఇచ్చిన వెన్ డయాగ్రమ్‌లలో ఏది కచ్చితంగా సంఘవిద్రోహ శక్తులు, జేబు దొంగలు, బ్లాక్‌మెయిలర్స్‌ను సూచిస్తుంది?



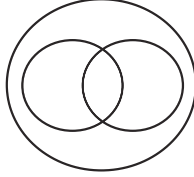
(ఎ)



(బి)



(సి)

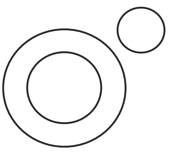


(డి)

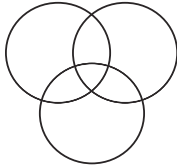
సమాధానం (డి)

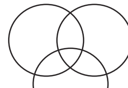
జేబు దొంగల్లో కొంతమంది బ్లాక్‌మెయిలర్స్ ఉంటారు. అదేవిధంగా బ్లాక్‌మెయిలర్స్‌లో కొంత మంది జేబు దొంగలు ఉంటారు. ఈ రెండు కుటుంబాలు కూడా సంఘవిద్రోహ శక్తుల్లో భాగమే.

4. పావురాలు, పక్షులు, కుక్కలను కింద ఇచ్చిన ఏ చిత్రం సరిగా సూచిస్తుంది?



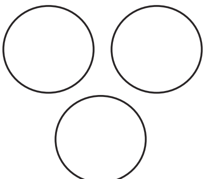
(ఎ)



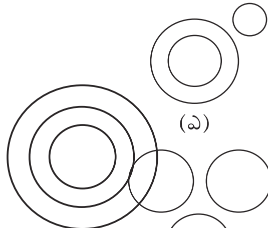


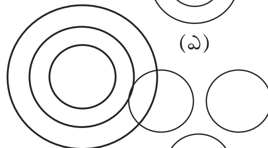
(ఎ)

(బి)

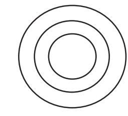


(సి)





(సి)

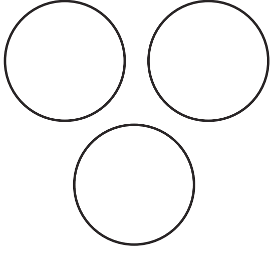


(డి)

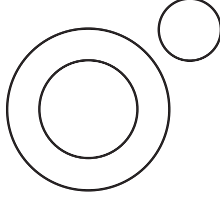
సమాధానం (ఎ)

పావురాలు అన్నీ పక్షుల్లో భాగం. కానీ కుక్కలు ఈ రెండు కుటుంబాలకు సంబంధం లేనిది.

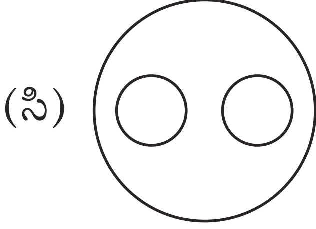
5. బుధుడు, అంగారకుడు, గ్రహాలను కింది ఏ చిత్రం సూచిస్తుంది?

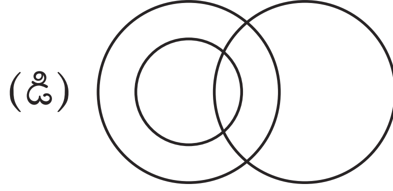


(ఎ)



(బి)

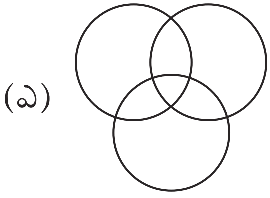


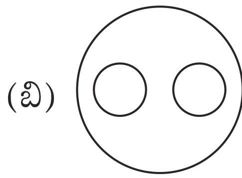


సమాధానం (సి)

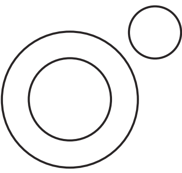
బుధుడు, అంగారకుడు ఒకదానికొకటి సంబంధం లేనివి. కానీ ఈ రెండూ కూడా గ్రహాల్లో భాగమే.

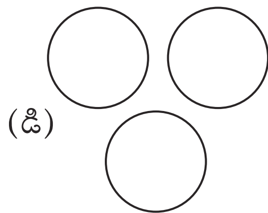
6. త్రిభుజం, చతుర్భుజం, చతురస్రాలను కింది వాటిలో ఏ చిత్రం సూచిస్తుంది?





(సి)

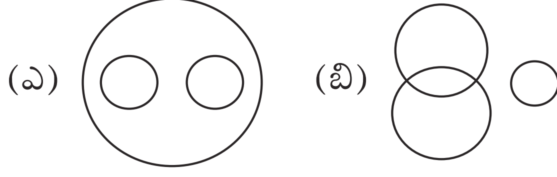


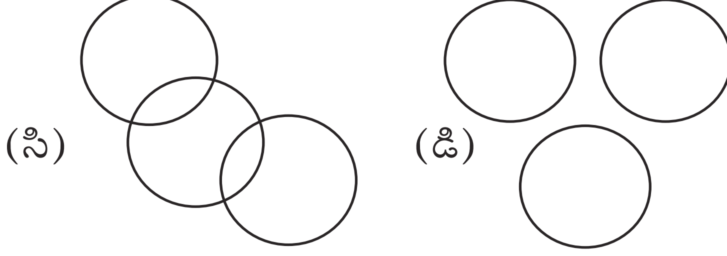


సమాధానం (సి)

చతురస్రాలన్నీ చతుర్భుజంలో భాగాలు. కానీ త్రిభుజం వీటికి సంబంధం లేనిది.

7. డాక్టర్లు, నర్సులు, మానవులను కింది ఏ చిత్రం సూచిస్తుంది?

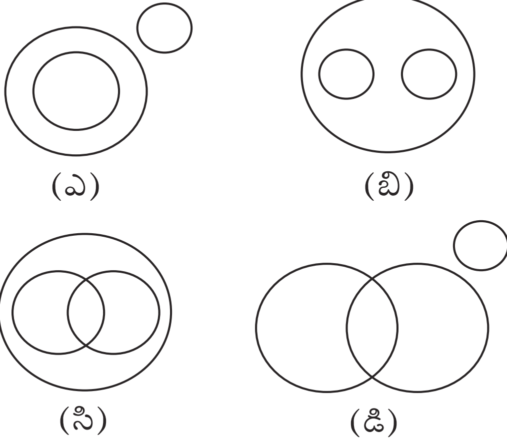




సమాధానం (ఎ)

డాక్టర్లు, నర్సులు వేర్వేరు కుటుంబాల వారు. కానీ వీరిరువురు మానవుల్లో భాగం.

8. జీవశాస్త్రం, జంతుశాస్త్రం, వృక్షశాస్త్రాలను కింది ఏ లాజికల్ డయాగ్రమ్ సూచిస్తుంది?

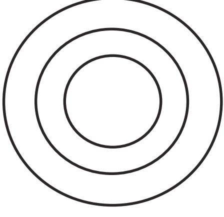


సమాధానం (బి)

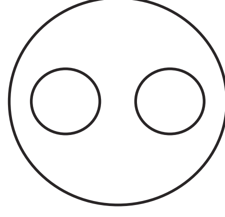
జంతుశాస్త్రం, వృక్షశాస్త్రం రెండు ఒకదానికొకటి ఏమాత్రం సంబంధం లేనివి. కానీ ఈ రెండూ కూడా జీవశాస్త్రంలో భాగం.

సూచనలు (ప్రశ్నలు 9 నుంచి 13 వరకు)

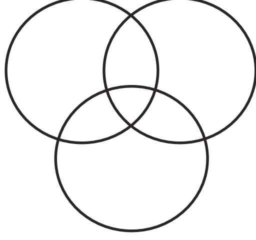
కింది లాజికల్ డయాగ్రమ్‌లను జాగ్రత్తగా పరిశీ లించి, దాని కింద ఇచ్చిన ప్రశ్నలకు సరైన లాజికల్ డయాగ్రమ్‌ను గుర్తించండి.



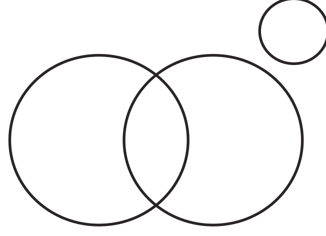
(ఎ)



(బి)

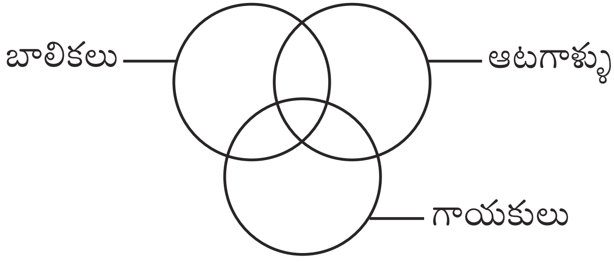


(సి)



(డి)

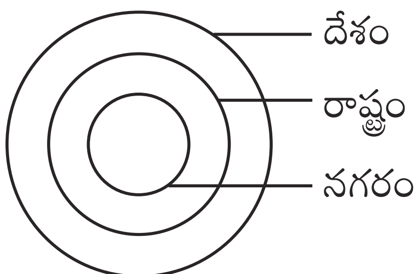
9. బాలికలు, ఆటగాళ్ళు, గాయకులు



సమాధానం (సి)

బాలికల్లో కొంతమంది ఆటగాళ్ళు, కొంత మంది గాయకులు ఉంటారు. ఆటగాళ్ళలో కొంతమంది బాలికలు, కొంతమంది గాయ కులు ఉంటారు. అలాగే గాయకుల్లో కొంత మంది బాలికలు, కొంతమంది ఆటగాళ్ళు ఉంటారు.

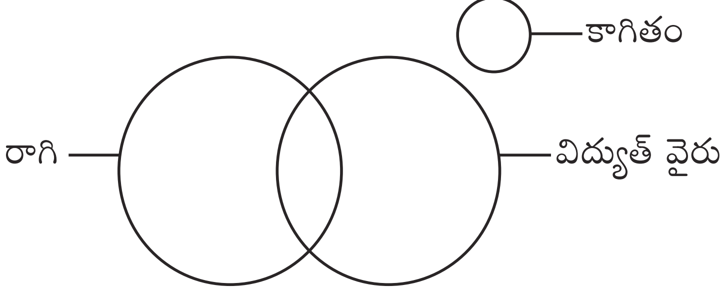
10. రాష్ట్రం, దేశం, నగరం



సమాధానం (ఎ)

నగరం రాష్ట్రం లోపల ఉంటుంది. రాష్ట్రం దేశం లోపల ఉంటుంది.

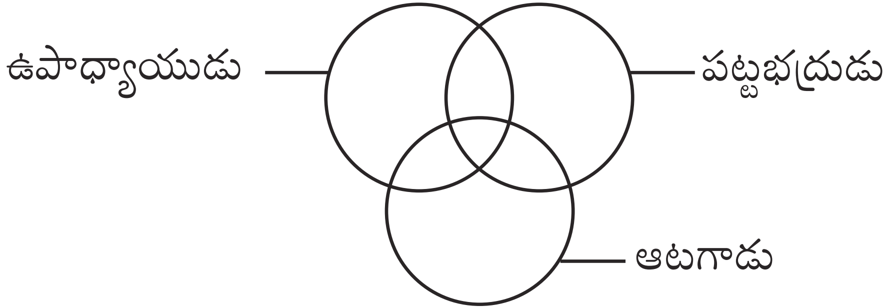
11. రాగి, కాగితం, విద్యుత్ వైరు



సమాధానం (డి)

కొన్ని విద్యుత్ వైర్లు రాగితో చేస్తారు. కాగితం అనేది రాగికి గాని, విద్యుత్ వైర్లకు గాని సంబంధం లేని అంశం.

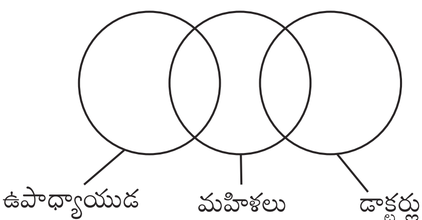
12. ఉపాధ్యాయుడు, పట్టభద్రుడు, ఆటగాడు



సమాధానం (సి)

ఉపాధ్యాయుల్లో కొంతమంది పట్టభద్రులుం టారు. కొంతమంది ఆటగాళ్ళు ఉంటారు. పట్ట భద్రుల్లో కొంతమంది ఉపాధ్యాయు లుంటారు.

13. మహిళలు, ఉపాధ్యాయులు, డాక్టర్లు

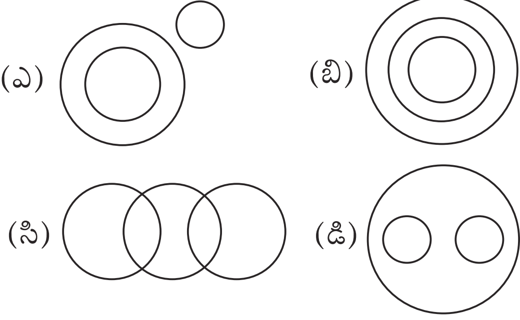


సమాధానం (డి)

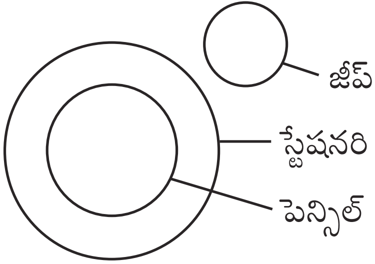
ఉపాధ్యాయుల్లో కొంతమంది, డాక్టర్లలో కొంతమంది మహిళలు. కానీ ఉపాధ్యా యుడు, డాక్టర్లు అనేవి రెండూ ఒకదానికొకటి ఏమాత్రం సంబంధం లేనివి.

సూచనలు (ప్రశ్న 14, 15లకు)

కింద ఇచ్చిన లాజికల్ డయాగ్రమ్‌లను పరిశీలించి, వాటి కింద ఇచ్చిన ప్రశ్నలకు సరైన సమాధానం గుర్తించండి.



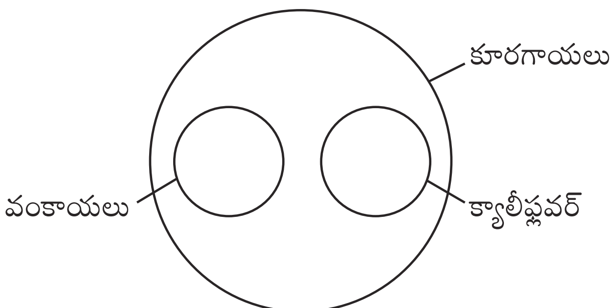
14. పెన్సిల్, స్టేషనరీ, జీప్



సమాధానం (ఎ)

పెన్సిల్ స్టేషనరీలో భాగం. కానీ జీప్ వీరికి సంబంధం లేని అంశం.

15. కూరగాయలు, వంకాయలు, క్యాలీఫ్లవర్



సమాధానం (డి)

వంకాయలు, క్యాలీఫ్లవర్ రెండూ కూడా కూరగాయల్లో భాగం. కానీ ఈ రెండూ ఒకదానికొకటి సంబంధం లేనివి.

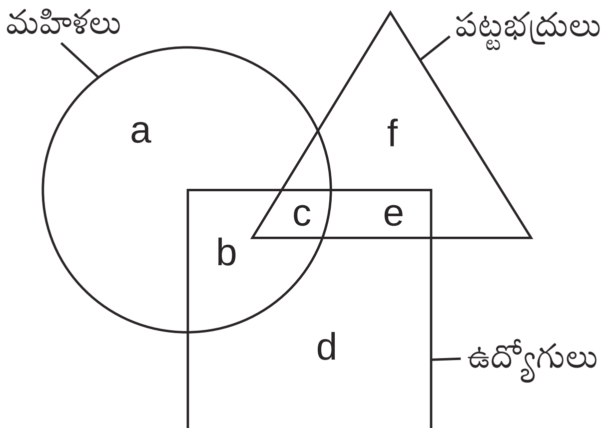
లాజికల్‌డయాగ్రమ్‌స్-4

తార్కిక చిత్ర పటాలకు సంబంధించి ప్రశ్నలు గ్రూప్ 2లోనే కాకుండా, సబ్ ఇన్‌స్పెక్టర్ ఆఫ్ పోలీస్, సివిల్ సర్వీసెస్ పరీక్షల్లో కూడా అడుగుతున్నారు. తార్కిక పటం ఇచ్చి దాని కింద రెండు లేదా మూడు ప్రశ్నలు అడిగే అవకాశం ఉంది.

ఒక చిత్రపటంలో త్రిభుజం, చతురస్రం, దీర్ఘ చతురస్రం, వృత్తం మొదలైన వాటిలో ఏవైనా మూడు గానీ, నాలుగు గానీ అంశాలు ఇస్తారు. ఒక్కో అంశం ఒక్కో కుటుంబాన్ని తెలియజేస్తుంది. ఈ చిత్రం లోపల అంకెలు గానీ ఆల్ఫాబెట్స్ గానీ ఇస్తారు. అభ్యర్థి ముందుగా ఆ చిత్రపటాన్ని సమగ్రంగా పరిశీలించి కింద ఇచ్చిన ప్రశ్నలకు సమాధానాలను గుర్తించాలి.

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం

I. కింది చిత్రంలో వృత్తం మహిళలను, త్రిభుజం పట్టభద్రుల (Graduates)ను, చతురస్రం ఉద్యోగులను గురించి తెలుపుతుంది. మీరు ముందుగా ఈ పటాన్ని పరిశీలించి, దాని కింద ఇచ్చిన ప్రశ్నలకు సమాధానాలను గుర్తించండి.



1. పట్టభద్రులు కాని మహిళా ఉద్యోగులు ఎవరు?

సమాధానం: ఈ ప్రశ్నను చివరి నుంచి సాధించుకుంటూ వస్తే.. ఉద్యోగులు అంటే చతురస్రంలో ఉన్నవారు కాబట్టి “b, c, d, e” ఉద్యోగులు అవుతారు. వీరిలో మహిళా ఉద్యోగులను గుర్తించాలి. వృత్తం మహిళలను సూచిస్తుంది. కాబట్టి “b, c, d, e”లలో ఏవి వృత్తంలో ఉన్నాయో చూడాలి. “b, c, d, e”లలో b, cలు మాత్రమే వృత్తంలో ఉన్నాయి. కాబట్టి b, cలు ‘‘మహిళా ఉద్యోగులు’’ అనే విషయం తెలుస్తుంది. ప్రశ్నలో ‘‘పట్టభద్రులు కాని మహిళా ఉద్యోగులు’’ అన్నారు. త్రిభుజం పట్టభద్రులను సూచిస్తుంది. ‘‘పట్టభద్రులు కాని’’ అన్నారు కాబట్టి b, cలలో ఏది త్రిభుజంలో లేదో గుర్తించాలి. b, cలలో ‘b’ త్రిభుజంలో లేదు కాబట్టి సమాధానం ‘b’ అవుతుంది.

∴ పట్టభద్రులు కాని మహిళా ఉద్యోగులు ‘b’ అవుతారు.

2. పట్టభద్రులైన మహిళా ఉద్యోగులు ఎవరు?

సమాధానం:

పట్టభద్రులై ఉండాలి

మహిళలై ఉండాలి

ఉద్యోగులై ఉండాలి

అంటే త్రిభుజం, వృత్తం, చతురస్రంలో ఉన్న మూడింటిలో ఉన్న అక్షరం చూడాలి. ‘c’ త్రిభుజంలో, వృత్తంలో, చతురస్రంలో ఉంది.

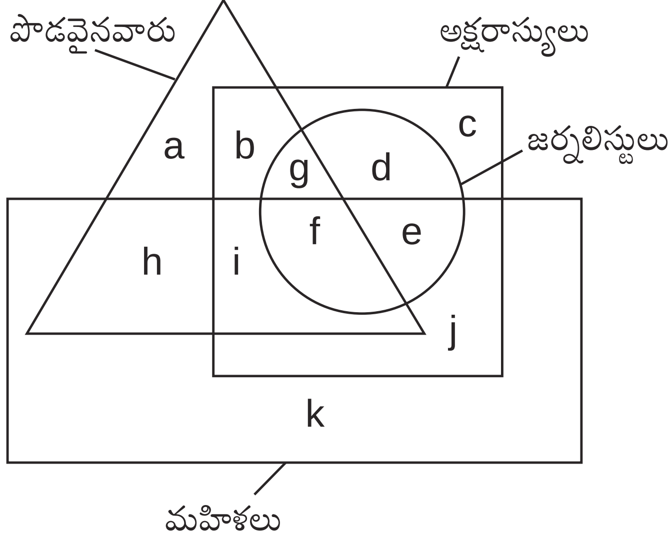
కాబట్టి పట్టభద్రులైన మహిళా ఉద్యోగులు ‘c’ అవుతారు.

3. మహిళలు కాని పట్టభద్రులైన ఉద్యోగులు ఎవరు?

సమాధానం: మహిళలు కాకూడదు అన్నారు కాబట్టి వృత్తంలో ఉండకూడదు. పట్టభద్రులైన ఉద్యోగులు అన్నారు కాబట్టి త్రిభుజంలో, చతురస్రంలో ఉండాలి.

త్రిభుజం, చతురస్రంలో ఉండి, వృత్తంలో లేని అక్షరం ‘e’. కాబట్టి మహిళలు కాని పట్టభద్రులైన ఉద్యోగులు ‘e’ అవుతారు.

II. కింది చిత్రంలో త్రిభుజం పొడవైనవారిని, చతురస్రం అక్షరాస్యులను, వృత్తం జర్నలిస్టులను, దీర్ఘచతురస్రం మహిళలను సూచిస్తుంది. ముందుగా కింది చిత్రాన్ని పరిశీలించి, దాని కింద ఉన్న ప్రశ్నలకు సమాధానాలు గుర్తించండి.



4. కింద ఇచ్చిన నాలుగు వాక్యాల్లో ఏది సరైంది?

ఎ) మహిళలందరూ పొడవైనవారు

బి) పొడవైన వారందరూ అక్షరాస్యులు

సి) అక్షరాస్యులందరూ జర్నలిస్టులు

డి) జర్నలిస్టులందరూ అక్షరాస్యులు

సమాధానం: 'ఎ' సరైంది కాదు. ఎందుకంటే మహిళలను దీర్ఘచతురస్రం సూచిస్తుంది. పొడవైన వారిని త్రిభుజం సూచిస్తుంది. ఒకవేళ త్రిభుజం దీర్ఘచతురస్రం లోపల ఉన్నట్లైతే మహిళలందరూ పొడవైనవారు అనేది సరైన వాక్యం అయ్యేది. కానీ ఆ విధంగా లేదు.

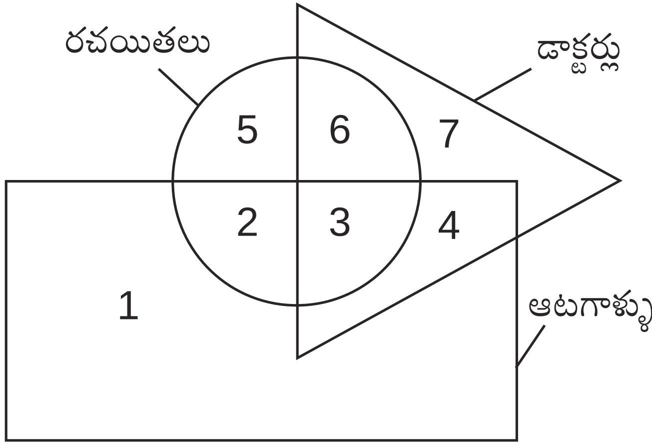
'బి' సరైంది కాదు. ఎందుకంటే పొడవైన వారిని త్రిభుజం సూచిస్తుంది. అక్షరాస్యులను చతురస్రం సూచిస్తుంది. ఒకవేళ త్రిభుజం చతురస్రం లోపల ఉన్నట్లైతే పొడవైన వారం దరూ అక్షరాస్యులు అనేది సరైన వాక్యం అయ్యేది. కానీ ఆ విధంగా లేదు గనుక ఇది సమాధానం కాదు.

'సి' సరైంది కాదు. ఎందుకంటే అక్షరాస్యులను చతురస్రం సూచిస్తుంది. జర్నలిస్టులను వృత్తం

సూచిస్తుంది. ఒకవేళ చతురస్రం వృత్తం లోపల ఉన్నట్లైతే అక్షరాస్యులందరూ జర్నలి స్టులు అనే వాక్యం సరి అయ్యేది. కానీ ఆ విధంగా లేదు.

'డి' సరైన వాక్యం అవుతుంది. ఎందుకంటే జర్నలిస్టులను సూచిస్తున్న వృత్తం, అక్షరాస్యు లను సూచిస్తున్న చతురస్రం లోపల ఉంది. కాబట్టి జర్నలిస్టులందరూ అక్షరాస్యులు అనే వాక్యం సరైన వాక్యం అవుతుంది.

కాబట్టి సమాధానం 'డి'.



5. జర్నలిస్టులు కాని పొడవైన మహిళా అక్షరా స్యులు ఎవరు?

సమాధానం: జర్నలిస్టులు కాకూడదు అంటే వృత్తం లోపల ఉండకూడదు. పొడవైన మహిళా అక్షరాస్యులు అంటే త్రిభుజంలో, దీర్ఘచతురస్రంలో, చతురస్రంలో ఉండాలి.

వృత్తంలో లేకుండా, త్రిభుజం, దీర్ఘచతు రస్రం, చతురస్రంలో ఉన్న అక్షరం 'i'.

∴ జర్నలిస్టు కాని పొడవైన మహిళా అక్షరాస్యులను 'i' సూచిస్తుంది.

6. పొడవైన మహిళా నిరక్షరాస్యులు ఎవరు?

సమాధానం: నిరక్షరాస్యులు అన్నారు కాబట్టి చతురస్రం లోపల ఉండకూడదు. పొడవైన మహిళ అన్నారు కాబట్టి త్రిభుజం, దీర్ఘచతు రస్రం లోపల ఉండాలి.

చతురస్రంలో లేకుండా త్రిభుజం, దీర్ఘచతుర స్రంలో ఉన్న అక్షరం 'h'.

∴ పొడవైన మహిళా నిరక్షరాస్యులను 'h' సూచిస్తుంది.

III. కింది చిత్రంలో వృత్తం రచయితలను, దీర్ఘచతురస్రం ఆటగాళ్ళను, త్రిభుజం డాక్టర్లను సూచిస్తుంది. మీరు ముందుగా ఆ చిత్రాన్ని పరిశీలించి, ఆపై దాని కింద ఇచ్చిన ప్రశ్నలకు సమాధానాలను గుర్తించండి.

7. రచయితలు, ఆటగాళ్ళు అయితే డాక్టర్లు ఎవరు?

సమాధానం: రచయితలు, ఆటగాళ్ళు అయితే డాక్టర్లు అంటే వృత్తంలో, దీర్ఘ చతురస్రంలో త్రిభుజంలో ఉండాలి. ఈ మూడింటిలో ఉన్న నంబరు ''3''.

∴ రచయితలు, ఆటగాళ్ళు అయితే డాక్టర్లను ''3'' సూచిస్తుంది.

8. ఆటగాళ్ళు కాని రచయితలైన డాక్టర్లు ఎవరు?

సమాధానం: ఆటగాళ్ళు కాకూడదు అన్నారు. అంటే దీర్ఘచతురస్రం లోపల ఉండకూడదు. రచయితలైన డాక్టర్లు అంటే వృత్తంలో, త్రిభుజంలో ఉండాలి.

దీర్ఘచతురస్రంలో లేకుండా వృత్తంలో, త్రిభుజంలో ఉన్న అంకె ''6''.

∴ ఆటగాళ్ళు కాని రచయితలైన డాక్టర్లను ''6'' సూచిస్తుంది.

9. '1' దేనిని సూచిస్తుంది?

సమాధానం:

'1' వృత్తంలో లేదు కాబట్టి రచయితలు కారు.

'1' త్రిభుజంలో లేదు కాబట్టి డాక్టర్లు కారు.

'1' దీర్ఘచతురస్రంలో ఉంది కాబట్టి ఆటగాళ్ళు అయి ఉంటారు.

∴ '1' అనేది రచయితలు కాని, డాక్టర్లు కాని ఆటగాళ్ళను సూచిస్తుంది.

10. 4 దేనిని సూచిస్తుంది?

సమాధానం:

4 వృత్తంలో లేదు కాబట్టి రచయితలు కారు.

4 త్రిభుజంలో, దీర్ఘచతురస్రంలో ఉంది. అంటే డాక్టర్లు, ఆటగాళ్ళను సూచిస్తుంది.

∴ 4 అనేది రచయితలు కాని డాక్టర్లైన ఆటగాళ్ళను సూచిస్తుంది.

11. 2 దేనిని సూచిస్తుంది?

సమాధానం:

2 త్రిభుజంలో లేదు కాబట్టి డాక్టర్లు కారు.

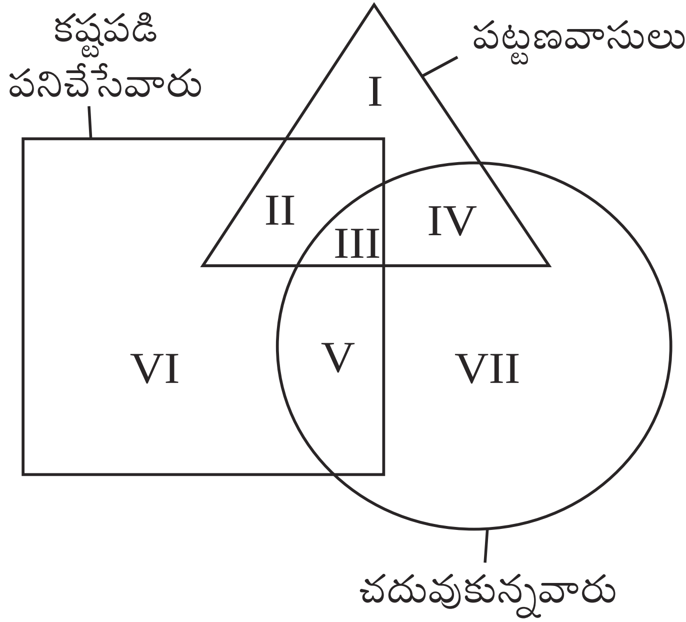
2 వృత్తంలో, దీర్ఘచతురస్రంలో ఉంది. అంటే రచయితలను, ఆటగాళ్లను సూచిస్తుంది.

∴ 2 అనేది డాక్టర్లు కాని రచయితలైన ఆటగాళ్ళను సూచిస్తుంది.

లాజికల్‌డయాగ్రమ్ స్-5

తార్కిక చిత్ర పటంలోనే ప్రశ్నకు సమాధానం ఉంటుంది. మనకు కావాల్సిందల్లా ఉన్న సమాధానాన్ని క్షుణ్ణంగా పరిశీలించి వేగంగా గుర్తించడమే. గతంలో వివిధ పరీక్షల్లో ఈ అంశంపై వచ్చిన ప్రశ్నలను పరిశీలిద్దాం.

1. కింది చిత్రంలో త్రిభుజం పట్టణ వాసులను, చతురస్రం కష్టపడి పనిచేసే వారిని, వృత్తం చదువుకున్న వారిని సూచిస్తుంది. అయితే ఏది కష్టపడి పనిచేయని, చదువుకున్న పట్టణ వాసులను సూచిస్తుంది?

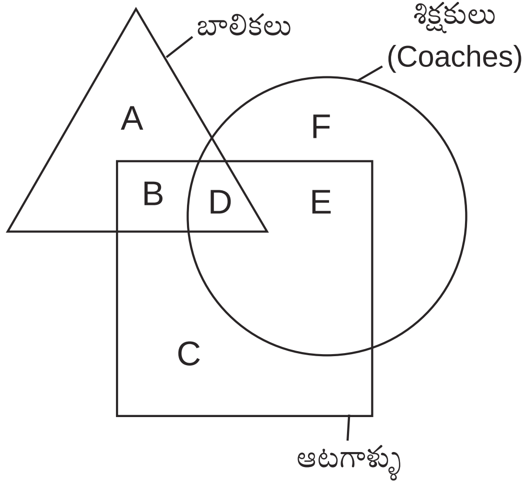


సమాధానం: కష్టపడి పనిచేయనివారు అన్నారు. అంటే చతురస్రంలో ఉండకూడదు. చదువుకున్న పట్టణ వాసులు అంటే వృత్తంలో, త్రిభుజంలో ఉండాలి.

చతురస్రంలో లేకుండా, వృత్తంలో, త్రిభు జంలో ఉంది IV.

∴ కష్టపడి పనిచేయని చదువుకున్న పట్టణ వాసులను IV సూచిస్తుంది.

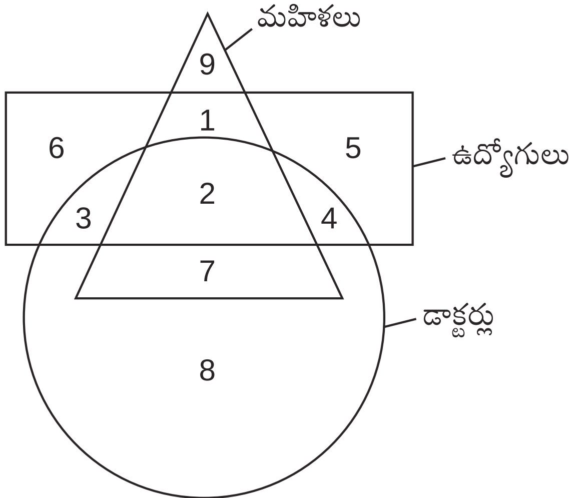
2. కింది చిత్రంలో త్రిభుజం బాలికలను, చతురస్రం ఆటగాళ్లను, వృత్తం శిక్షకుల (Coaches)ను సూచిస్తుంది. అయితే ఈ చిత్రం ఆధారంగా శిక్షకులు కాని, ఆట ఆడగలిగిన బాలికలను గుర్తించండి?



సమాధానం: శిక్షకులు కానివారు అంటే వృత్తంలో ఉండకూడదు. ఆట ఆడగలిగిన బాలికలు అంటే చతురస్రం, త్రిభుజంలో ఉండాలి. వృత్తంలో లేకుండా, చతురస్రంలో, త్రిభుజంలో ఉన్న అక్షరం 'B'.

∴ శిక్షకులు కాని, ఆట ఆడగలిగిన బాలి కలను 'B' సూచిస్తుంది.

3. కింది చిత్రంలో త్రిభుజం మహిళలను, దీర్ఘచతురస్రం ఉద్యోగస్తులను, వృత్తం డాక్టర్లను సూచిస్తుంది. అయితే కింది చిత్రం ఆధారంగా ఉద్యోగులు కాని, మహిళా డాక్టర్లను గుర్తించండి?



సమాధానం: ఉద్యోగులు కానివారు అంటే దీర్ఘచతురస్రంలో ఉండకూడదు. మహిళా డాక్టర్లు అంటే త్రిభుజంలో, వృత్తంలో ఉండాలి.

దీర్ఘచతురస్రంలో లేకుండా త్రిభుజంలో, వృత్తంలో ఉన్న అంకె '7'.

∴ ఉద్యోగులు కాని, మహిళా డాక్టర్లను '7' సూచిస్తుంది.

4. కింది చిత్రాన్ని పరిశీలించి, చదువుకోని, ఉద్యోగం చేస్తున్న యువతను గుర్తించండి?

యువత   చదువుకున్నవారు

1 2 3 5 4 6 7

ఉద్యోగులు

సమాధానం: చదువుకోనివారు అన్నారు. అంటే చదువుకున్నవారిని సూచించే వృత్తంలో ఉండకూడదు. ఉద్యోగం చేస్తున్న యువత అన్నారు. కాబట్టి మిగతా రెండు వృత్తాల్లో ఉండాలి. ఆ విధంగా '4' ఉంది.

∴ చదువుకోని, ఉద్యోగం చేస్తున్న యువ తను '4' సూచిస్తుంది.

సూచనలు (5 నుంచి 8 ప్రశ్నల వరకు): కింది చిత్రంలో చిన్న త్రిభుజం ఉపాధ్యాయులను, పెద్ద త్రిభుజం రాజకీయ నాయకులను, వృత్తం పట్ట భద్రులను, దీర్ఘచతురస్రం పార్లమెంటు సభ్యులను సూచిస్తుంది. ఈ చిత్రాన్ని ఆధారంగా చేసుకొని కింద ఇచ్చిన ప్రశ్నలకు సమాధానాలు గుర్తించండి.

ఉపాధ్యాయులు   రాజకీయ నాయకులు   పార్లమెంటు

E L D H C F G B A

పట్టభద్రులు

5. రాజకీయ నాయకులు కాకుండా, ఉపాధ్యాయులు, పట్టభద్రుల్లో ఏదో ఒకటి అయిన వారు ఎవరు?

సమాధానం: రాజకీయ నాయకులు కాకుండా ఉండాలి అంటే పెద్ద త్రిభుజంలో ఉండకూ డదు. ఉపాధ్యాయులు, పట్టభద్రుల్లో ఏదో ఒకటి అయి ఉండాలి. అంటే చిన్న త్రిభు జంలో గాని, వృత్తంలో

గాని ఉండాలి.

పెద్ద త్రిభుజంలో లేకుండా చిన్న త్రిభుజంలో గాని, వృత్తంలో గాని ఉన్న అక్షరాలు A, E.

∴ రాజకీయ నాయకులు కాకుండా, ఉపా ధ్యాయులు, పట్టభద్రుల్లో ఏదో ఒకటి అయిన వారిని "A, E" సూచిస్తున్నాయి.

6. పార్లమెంటు సభ్యులు కాని, రాజకీయ నాయకులైన పట్టభద్రులు ఎవరు?

సమాధానం: పార్లమెంటు సభ్యులు కాకూడదు అంటే దీర్ఘచతురస్రంలో ఉండకూడదు. రాజకీయ నాయకులైన పట్టభద్రులు అంటే పెద్ద త్రిభుజంలో, వృత్తంలో కామన్‌గా ఉండాలి.

దీర్ఘచతురస్రంలో ఉండకుండా పెద్ద త్రిభుజంలో, వృత్తంలో కామన్‌గా ఉన్న అక్షరాలు "B, C".

∴ పార్లమెంటు సభ్యులు కాకుండా, రాజకీయ నాయకులైన పట్టభద్రులను "B, C"లు సూచిస్తాయి.

7. ఉపాధ్యాయులు, పట్టభద్రులు కాకుండా ఉన్న రాజకీయ నాయకులను గుర్తించండి?

సమాధానం: ఉపాధ్యాయులు, పట్టభద్రులు కాకుండా ఉండాలి అంటే చిన్న త్రిభుజంలో ఉండకూడదు, వృత్తంలో ఉండకూడదు. రాజకీయ నాయకులు అంటే పెద్ద త్రిభుజంలో ఉండాలి.

చిన్న త్రిభుజంలో, వృత్తంలో లేకుండా పెద్ద త్రిభుజంలో ఉన్న అక్షరాలు L, H.

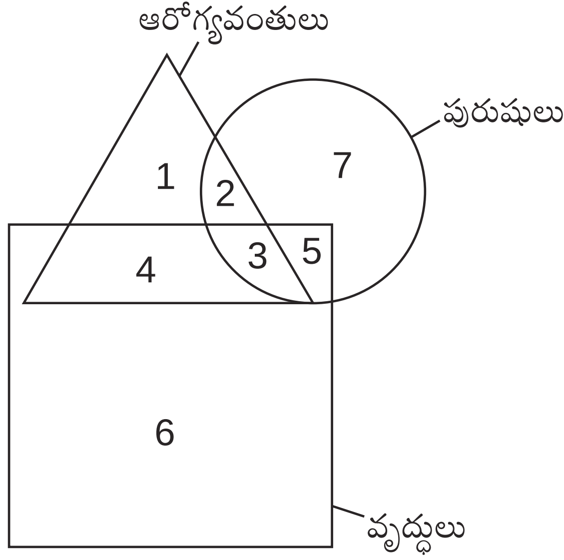
∴ ఉపాధ్యాయులు, పట్టభద్రులు కాకుండా ఉన్న రాజకీయ నాయకులను "L, H". సూచిస్తాయి.

8. పార్లమెంటు సభ్యులైన పట్టభద్రులైన ఉపాధ్యాయులను గుర్తించండి?

సమాధానం: పార్లమెంటు సభ్యులైన, పట్టభద్రులైన ఉపాధ్యాయులు అంటే దీర్ఘచతురస్రం, వృత్తం, చిన్న త్రిభుజం మూడింటిలో కామన్‌గా ఉండాలి. అలా కామన్‌గా "F" ఉంది, కాబట్టి సమాధానం "F" అవుతుంది.

∴ పార్లమెంటు సభ్యులైన, పట్టభద్రులైన ఉపాధ్యాయులను "F" సూచిస్తుంది.

9. కింది చిత్రంలో త్రిభుజం ఆరోగ్యవంతులను, చతురస్రం వృద్ధులను, వృత్తం పురుషులను సూచిస్తుంది. అయితే ఈ చిత్రం ఆధారంగా వృద్ధులు కాని ఆరోగ్యవంతులైన పురుషులను గుర్తించండి?

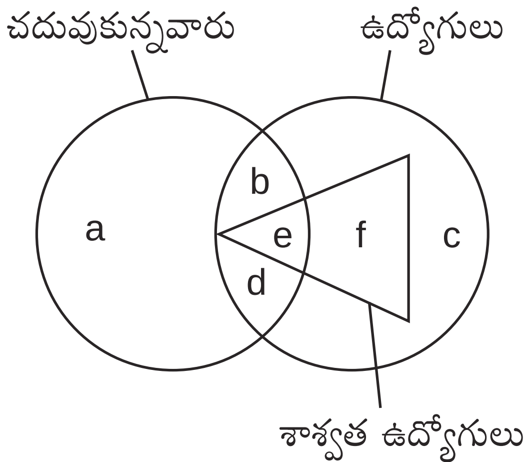


సమాధానం: వృద్ధులు కానివారు అంటే చతురస్రంలో ఉండకూడదు. ఆరోగ్యవం తులైన పురుషులు అంటే త్రిభుజంలో, వృత్తంలో రెండింటిలో కామన్‌గా ఉండాలి.

చతురస్రంలో లేకుండా త్రిభుజంలో, వృత్తంలో కామన్‌గా ఉన్న అంకె ''2''.

∴ వృద్ధులు కాని, ఆరోగ్యవంతమైన పురు షులను ''2'' సూచిస్తుంది.

10. కింది చిత్రం ఆధారంగా శాశ్వత ఉద్యోగులు కాని, చదువుకున్న ఉద్యోగులను గుర్తించండి?



సమాధానం: శాశ్వత ఉద్యోగులు కాకూడదు. అంటే త్రిభుజంలో ఉండకూడదు. చదువు కున్న ఉద్యోగులు అంటే రెండు వృత్తాల్లో కామన్‌గా ఉండాలి.

త్రిభుజంలో లేకుండా రెండు వృత్తాల్లో కామన్‌గా ఉన్న అక్షరాలు b, d.

∴ శాశ్వత ఉద్యోగులు కాని చదువుకున్న ఉద్యోగులను "b, d" సూచిస్తున్నాయి.

కాలం - దూరం-1

ముఖ్యమైన సూత్రాలు

I. దూరం = వేగం × కాలం

II. వేగం = దూరం/ కాలం

$$\text{కాలం} = \frac{\text{దూరం}}{\text{వేగం}}$$

III. ప్రమాణాలు

- సాధారణంగా దూరాన్ని మీటర్లు లేదా కిలోమీటర్లలో సూచిస్తాం.
- కాలాన్ని సెకన్లలో, నిమిషాల్లో లేదా గంటల్లో సూచిస్తాం.
- వేగాన్ని సాధారణంగా మీటరు/సెకను లేదా కిలోమీటరు/గంటలలో సూచిస్తాం.

మీటరు/సెకనులో ఇచ్చిన వేగాన్ని $\frac{18}{5}$ తో గుణించి, కిలోమీటరు / గంటలోకి మార్చవచ్చు.

అలాగే కిలోమీటరు/గంటలో ఇచ్చిన వేగాన్ని $\frac{5}{18}$ తో గుణించి మీటరు/సెకనులోకి మార్చవచ్చు.

IV **సాపేక్ష వేగం:** రెండు వాహనాలు V_1, V_2 వేగాలతో ప్రయాణిస్తున్నాయని అను కుందాం.

అవి రెండు ఒకేదిశలో ప్రయాణిస్తుంటే వాటిమధ్య సాపేక్ష వేగం = $V_1 - V_2$

అవి రెండు వ్యతిరేక దిశలో ప్రయాణిస్తుంటే వాటిమధ్య సాపేక్షవేగం = $V_1 + V_2$

V. రెండు వాహనాల మధ్యదూరం = సాపేక్ష వేగం × కాలం

ఉదాహరణలు

1. ఒక కారు 600 కి.మీ. దూరాన్ని 8 గంటల్లో ప్రయాణిస్తుంది. దాని వేగాన్ని 25 కి.మీ./గంట పెంచితే 800 కి.మీ. దూరాన్ని ఎంత సమయంలో చేరుకుంటుంది?

ఎ) 7 గంటలు బి) 8 గంటలు

సి) 9 గంటలు డి) 10 గంటలు

సమాధానం: బి

మొదటి కారు వేగం $= \frac{600}{8}$

= 75 కి.మీ./గంట

వేగాన్ని 25 కి.మీ./గంట పెంచితే = 75 + 25

= 100 కి.మీ./గంట

ఈ వేగంతో 800 కి.మీ. ప్రయాణించడానికి పట్టే సమయం $=\frac{800}{100}=8$ గంటలు

2. ఒక ఉద్యోగి 3 కి.మీ./గంట వేగంతో నడిస్తే ఆఫీసుకు 20 నిమిషాలు ఆలస్యంగా వెళ్తాడు. వేగాన్ని 2 కి.మీ./గంట పెంచితే ఆఫీసుకు 20 నిమిషా లు ముందుగా వెళ్తాడు. అ యితే అతని ఇంటి నుంచి ఆ ఫీసుకి మధ్య దూరమెంత?

ఎ) 2 కి.మీ. బి) 3 కి.మీ.

సి) 4 కి.మీ. డి) 5 కి.మీ.

సమాధానం: డి

ఇంటికి, ఆఫీసుకి మధ్య దూరం = x అనుకొంటే, దత్తాంశం నుంచి

$\frac{x}{3}-\frac{x}{5}=\frac{40}{60}$ $\Rightarrow \frac{2x}{15}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow x = 5$

3. 180 మీటర్ల పొడవు గల ఒక రైలు అంతే పొడవు గల ఒక వంతెనను 18 సెకన్లలో దాటు తుంది. అయితే ఆ రైలు వేగం ఎంత?

ఎ) 20 మీ/సె బి) 10 మీ/సె

సి) 15 మీ/సె డి) 18 మీ/సె

సమాధానం: ఎ

18 సెకన్లలో రైలు ప్రయాణించిన మొత్తం దూరం = రైలు పొడవు + వంతెన పొడవు

= 180 + 180

= 360 మీటర్లు

$\therefore$ రైలు వేగం $=\frac{360}{18}$ = 20 మీ/సె

4. 60 కి.మీ./గంట వేగంతో ప్రయాణిస్తున్న ఒక రైలు ఒక వంతెనను 20 సెకన్లలో దాటుతుంది. అయితే రైలు పొడవు ఎంత?

ఎ) 333 మీ. బి) 300 మీ.

సి) 250 మీ. డి) కనుక్కోలేం

సమాధానం: డి

రైలు వేగం, అది ప్రయాణించిన కాలం ఇచ్చారు. కాబట్టి 20 సెకన్లలో రైలు ప్రయాణం చేసిన దూరాన్ని కనుక్కోవచ్చు. అంటే (రైలు పొడవు + వంతెన పొడవు) విలువను కనుక్కోవచ్చు. ఒకవేళ దత్తాంశంలో వంతెన పొడవు ఇచ్చిఉంటే అప్పుడు రైలు పొడవును కనుక్కోడానికి

అవకాశం ఉండేది.

5. 100 మీటర్ల పొడవు గల ఒక రైలు 72 కి.మీ./గంట వేగంతో ప్రయాణిస్తుంది. 200 మీటర్ల పొడవు గల మరొక రైలు 63 కి.మీ./గంట వేగంతో అదే దిశలో వెళ్తుంది. అయితే మొదటి రైలుకు రెండో రైలును దాటడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది?

ఎ) 60 సెకన్లు బి) 90 సెకన్లు

సి) 120 సెకన్లు డి) 150 సెకన్లు

సమాధానం: సి

రెండో రైలును దాటాలంటే మొదటి రైలు ప్రయాణించాల్సిన దూరం = మొదటి రైలు పొడవు + రెండవ రైలు పొడవు

= 100 + 200 = 300 మీటర్లు

రెండు రైళ్ల సాపేక్ష వేగం = 72 – 63

= 9 కి.మీ./గంట

9 కి.మీ./గంట $= 9 \times \frac{5}{18} = \frac{5}{2}$ మీ/సె

$\therefore$ కాలం = $\frac{\text{దూరం}}{\text{సాపేక్ష వేగం}}$

$= \frac{300}{\frac{5}{2}} = 300 \times \frac{2}{5} = 120$ సెకన్లు

సగటు వేగం

ఒక వ్యక్తి లేదా ఒక వాహనం వివిధ దశలలో వేర్వే రు వేగాలతో ప్రయాణించినప్పుడు మొత్తం కాలానికి సంబంధించిన సగటు వేగాన్ని కనుక్కోవచ్చు.

సగటు వేగం =

$$\frac{\text{వివిధ దశలలో ప్రయాణించిన మొత్తం దూరం}}{\text{మొత్తం ప్రయాణ కాలం}}$$

$$= \frac{\text{మొత్తం దూరం}}{\text{మొత్తం కాలం}}$$

ఉదాహరణలు

1. ఒక కారు మొదటి 30 నిమిషాలు 40 కి.మీ./గంట వేగంతో, తర్వాతి 45 నిమిషాలు 60 కి.మీ./గంట వేగంతో ప్రయాణం చేస్తే ఆ కారు సగటు వేగం ఎంత?

ఎ) 50 కి.మీ./గంట బి) 52 కి.మీ./గంట

సి) 48 కి.మీ./గంట   డి) 54 కి.మీ./గంట

సమాధానం: బి

30 నిమిషాలు $=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$ గంట

45 నిమిషాలు $=\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$ గంట

మొత్తం కాలం $=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

మొదటి 30 నిమిషాల్లో ప్రయాణించిన దూరం = కాలం × వేగం

$=\frac{1}{2}\times 40=20$ కి.మీ.

తర్వాత 45 నిమిషాల్లో ప్రయాణించిన దూరం

$=\frac{3}{4}\times 60=45$ కి.మీ.

మొత్తం దూరం = 20 + 45 = 65 కి.మీ.

సగటు వేగం= $\frac{\text{మొత్తం దూరం}}{\text{మొత్తం కాలం}}$ కి.మీ./గంట

$=\frac{65}{\frac{5}{4}}=65\times\frac{4}{5}=52$

కాలం దూరం-2

రైళ్ళు - కొన్ని సమస్యలు

గ్రూప్ - 1 ప్రిలిమ్స్, గ్రూప్-2, జేఎల్-డీఏఓ, ఇతర పోటీ పరీక్షల్లో కాలం-దూరం -వేగం అంశం కింద రైళ్లకు సంబంధించిన ప్రశ్నలు ప్రధానం. కాలం-దూరానికి సంబంధించిన కొన్ని ముఖ్యమైన సూత్రాలను చూద్దాం.

- దూరం = కాలం × వేగం,
- కాలం = దూరం/వేగం,
- వేగం = దూరం/కాలం

ప్రమాణాలు: వేగానికి రెండు రకాల ప్రమాణాలు.

1. కిలోమీటర్లు/గంట 2. మీటర్లు/సెకను

మీటర్లు/సెకను ప్రమాణాల్లో ఉన్న వేగాన్ని కిలోమీటర్లు/గంటల్లోకి మార్చాలంటే 18/5తో గుణించాలి. కిలోమీటర్లు/గంట ప్రమాణాల్లో ఉన్న వేగాన్ని 5/18తో గుణించి మీటరు/ సెకన్లలోకి మార్చవచ్చు.

సాపేక్షవేగం: రెండు వాహనాల వేగాల మధ్య ఉండే పోలికను ఆ రెండు వాహనాల మధ్య సాపేక్ష వేగం అంటారు. రెండు వాహనాలు ఒకే దిశలో ప్రయా ణిస్తుంటే వాటి వేగాల బేధమే సాపేక్షవేగం. రెండు వాహనాలు వ్యతిరేక దిశల్లో ప్రయాణిస్తుంటే వాటి వేగాల మొత్తమే సాపేక్షవేగం అవుతుంది. ఇప్పుడు రైలు ఆయా రకాల వాహనాలను/వస్తువులను దాటడానికి సంబంధించిన అంశాలను చర్చిద్దాం.

1. వస్తువు ఎలాంటి చలనం లేకుండా నిశ్చలంగా ఉండి, దాని పొడవు పరిగణించదగింది కానప్పుడు ఆ వస్తువును దాటడానికి రైలుకు పట్టే సమయం

= రైలు పొడవు/రైలు వేగం

ఉదా: రైలు ఒక స్తంభాన్ని దాటడం లేదా ఆగి ఉన్న మనిషిని దాటడం.

2. వస్తువు నిశ్చలంగా ఉండి, దాని పొడవు పరి గణించదగింది అయినప్పుడు - ఆ వస్తువును దాటడానికి రైలుకు పట్టే సమయం

= రైలు పొడవు+వస్తువు పొడవు/రైలు వేగం

ఉదా: బ్రిడ్జి, ఫ్లాట్‌ఫాంని, ఆగి ఉన్న రైలును దాటడం.

3. వస్తువు చలనంలో ఉండి, దాని పొడవు పరిగణిం చదగింది కానప్పుడు వస్తువును దాటడానికి రైలుకు పట్టే సమయం

= రైలు పొడవు/(రైలు వేగం-వస్తువు వేగం)

ఒకవేళ ఆ వస్తువు, రైలు వ్యతిరేక దిశల్లో ప్రయాణం చేస్తుంటే, వస్తువును దాటడానికి రైలుకు పట్టే

సమయం

= రైలు పొడవు/(రైలువేగం+వస్తువు వేగం)

4. వస్తువు చలనంలో ఉండి, దాని పొడవు పరిగణించ చదగింది అయినప్పుడు, ఆ వస్తువును దాటడానికి రైలుకు పట్టే సమయం

= (రైలు పొడవు+వస్తువు పొడవు)/(రైలువేగం – వస్తువు వేగం) ఒకవేళ వస్తువు, రైలు వ్యతిరేక దిశల్లో ప్రయాణిస్తుంటే ఆ వస్తువును దాటడానికి రైలుకు పట్టే సమయం

= (రైలు పొడవు+వస్తువు పొడవు) / (రైలువేగం + వస్తువు వేగం) ఉదా: చలనంలో ఉన్న ఒక రైలు, చలనంలో ఉన్న మరో రైలును దాటడం.

ఉదా: ఒక రైలు, స్టేషన్‌లో ఫ్లాట్‌ఫాంని 36 సెకన్లలో, ఫ్లాట్‌ఫాం మీద నిల్చున్న వ్యక్తిని 20 సెకన్లలో దాటింది. రైలు వేగం 54 కి.మీ/గంట అయితే ఫ్లాట్‌ఫాం పొడవు ఎంత? (ఏజీఈ, 1982)

జవాబు: దత్తాంశంలో సమయం సెకన్లలో ఉంది కాబట్టి, రైలు వేగాన్ని మీటర్లు/సెకన్లలోకి మార్చాలి. రైలువేగం = $54 \times 5/18 = 15$ మీ/సె రైలుపొడవును L_1, ఫ్లాట్‌ఫాం పొడవును L_2 అని అనుకుంటే..

ఇప్పుడు వ్యక్తిని దాటడానికి రైలుకు పట్టే సమయం = 20 సె॥ = $L_1/15$

$\Rightarrow L_1 = 20 \times 15 = 300$ మీటర్లు.

ఫ్లాట్‌ఫాంని దాటడానికి రైలుకు పట్టే సమయం

= 36సె॥ = $L_1+L_2/15$

$\Rightarrow 300 + L_2 = 36 \times 15 = 540$

$\Rightarrow L_2 = 540-300 = 240$ మీ॥

∴ ఫ్లాట్‌ఫాం పొడవు = 240 మీటర్లు.

ఉదాహరణ: ఒక రైలు ఇంజన్ 210 మీ॥, 122మీ॥ పొడవు ఉన్న రెండు టన్నెళ్లను వరుసగా 25 సె॥లలో దాటుతుంది. అయితే ఆ రైలు ఇంజన్ పొడవు, వేగాలను కనుక్కోండి? (ఎమ్‌బీఎ, 1998)

జవాబు: రైలు పొడవును L మీ॥, వేగాన్ని V మీ/సె, అని అనుకుంటే... అప్పుడు 210 మీ॥ పొడవు ఉన్న టన్నెల్‌ను దాటడానికి పట్టే సమయం

= 25 సె॥ = $L+ 210/V \Rightarrow 25V = L + 210$

$\Rightarrow L = 25V - 210 \longrightarrow$ ①

అలాగే 122 మీ॥ పొడవు ఉన్న టన్నెల్‌ను దాటడా నికి పట్టే సమయం = 17సె॥ = $L+122/V$

$\Rightarrow L = 17V - 122 \longrightarrow$ ②

① & ② నుంచి $25V - 210 = 17V - 122$

$\Rightarrow 25V - 17V = 210 - 122$

$\Rightarrow 8V = 88 \Rightarrow V = 11$ మీ/సె॥

① నుంచి L= 25×11– 210 = 65 మీ॥

ఉదాహరణ: 190 మీ॥, 210 మీ॥ పొడవులు ఉన్న రెండు రైళ్లు వ్యతిరేక దిశల్లో ప్రయాణిస్తున్నాయి. ఆ రెండు రైళ్ల వేగాలు వరుసగా 40 కి.మీ/గంట, 32 కిమీ/గంట. అయితే ఆ రెండు రైళ్లు ఒకదాని నొకటి దాటడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది?

జవాబు: రైళ్ల వేగాల మొత్తం = 40+32 = 72 కి.మీ/గ = 72 × 5/18 = 20 మీ/సె॥

ఆ రెండు రైళ్లు ఒకదానినొకటి దాటడానికి పట్టే సమయం = రెండు రైళ్ల పొడవుల మొత్తం/ రెండు రైళ్ల వేగాల మొత్తం

= 190+210/20 = 400/20 = 20 సె॥

ఉదాహరణ: ఒక రైలు హౌరా నుంచి పాట్నాకు, మరొక రైలుకు పాట్నా నుంచి హౌరాకు ఒకేసారి బయల్దేరాయి. ఆ రెండు రైళ్లు కలిసిన తర్వాత వాటి వాటి లక్ష్యాలను వరుసగా 9 గం॥, 16 గం॥లలో చేరుకున్నాయి. వాటి వేగాల నిష్పత్తి ఎంత?

ఎ) 2:3 బి) 4:3 సి) 6:7 డి) 9:16

(ఆర్ఆర్బి. 2001)

జవాబు: రెండు రైళ్ల వేగాలు వరుసగా V_1, V_2 కి.మీ/గం॥ అనుకుంటే...అవి రెండు 'O' అనే చోట కలిస్తే...

(హౌరా) (పాట్నా)

దత్తాంశం నుంచి OP = $9V_1$ కి.మీ,

HO = $16V_2$ కి.మీ॥

ఇప్పుడు మొదటి రైలుకు హౌరా నుంచి 'O'కి వెళ్ల డానికి పట్టే సమయం = $16V_2 / V_1 \rightarrow$ ①

రెండో రైలుకు పాట్నా నుంచి 'O'కి వెళ్లడానికి పట్టే సమయం = $9V_1 / V_2 \rightarrow$ ②

① & ②ల నుంచి $16V_2 / V_1 = 9V_1 / V_2$

$\Rightarrow V_1 \times V_1 / V_2 \times V_2 = 16/9$

$$\Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 = \frac{16}{9} \quad \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{16}{9}}$$

$\Rightarrow V_1/V_2 = 4:3$

∴ వేగాల నిష్పత్తి = 4:3

∴ సమాధానం b

గమనిక: A నుంచి Bకి, Bనుంచి Aకి రెడు రైళ్లు ఒకేసారి బయలుదేరాయనుకుందాం. అవి రెండు

కలిసిన తర్వాత వాటి వాటి లక్ష్యాలను... అవి a గం।।లు b గం।।లలో చేరుకుంటే ఆ రెండు రైళ్ల వేగాల నిష్పత్తి = $\sqrt{b}:\sqrt{a}$ దీనిని ఒక సూత్రంలా గుర్తుంచుకోవచ్చు.

ఉదా: Xఅనే రైలు 4 pmకి Aనుంచి బయలుదేరి 5 pmకి B చేరింది. Yఅనే మరో రైలు 4 pmకి B నుంచి బయలుదేరి 5.30 pmకి Aకి చేరింది. ఆ రెండు రైళ్లు కలిసినప్పుడు సమయం ఎంత?

జవాబు: A,Bల మధ్య దూరం = Xకి.మీ. అనుకుంటే.. Xఅనే రైలుకు A నుంచి B కి చేరడానికి 1 గంట పట్టింది. ∴X రైలు వేగం= X/1 = X కి.మీ/గం।। అలాగే Y అనే రైలు వేగం= $\frac{x}{3/2}$ = 2x/3 కి.మీ/గం।। రెండు రైళ్లు వ్యతిరేక దిశలో ప్రయాణిస్తున్నాయి.

కాబట్టి వాటి సాపేక్ష వేగం = $x+\frac{2x}{3}$ 5x/3కి.మీ/గం।। రెండు రైళ్లు కలవాలంటే, ఆ రెండు రైళ్లు ప్రయాణించాల్సిన దూరాల మొత్తం = కి.మీ।। ఇందుకు పట్టే సమయం = **మొత్తం దూరం/ సాపేక్షవేగం** $\frac{x}{5x/3}$ = 3/5 గంటలు = 3/5 × 60 నిమిషాలు = 36 నిమిషాలు.

∴రెండు రైళ్లు కలుసుకున్నప్పుడు సమయం 4 గంటల 36 నిమిషాలు అవుతుంది.

గమనిక: ఒకరైలు A నుంచి B కి చేరడానికి t_1 గంటలు అదే సమయానికి Bనుంచి Aకి చేరడానికి మరొక రైలుకు t_2గంటలు పడుతుందనుకుంటే.. అప్పుడు అవి రెండు బయలుదేరిన తర్వాత కలుసుకోవడానికి పట్టే సమయం=

$\frac{t_1 \times t_2}{t_1 + t_2}$ గంటలు

దీనిని కూడా ఒక సూత్రంలా గుర్తుంచు కోవచ్చు.పై ఉదాహరణలో

t_1=1, t_2 = 3/2 ఇప్పుడు పై సూత్రాన్ని ఉపయో గించి సమాధానాన్ని రాబట్టవచ్చు.

కాలం-దూరం-3

సగటు వేగం – సగటు మైలేజీ

'సగటు వేగం' అనే అంశం అన్ని పోటీ పరీక్షలకూ అవసరమైందే. గ్రూప్–I మెయిన్స్, సివిల్ సర్వీసెస్ మెయిన్స్ వంటి పరీక్షలకు కూడా సగటు వేగం, సగటు మైలేజీ అనే అంశాలు ఎంతో ప్రధానమైనవి. ఈ అంశాల నుంచి ప్రశ్నలు రావడానికి కచ్చితంగా అవకాశం ఉంది.

సగటు వేగం (Average Speed or Average Velocity): అన్ని దశల్లో కలిపి ఒక వాహనం సగటు వేగం = ఆయా దశల్లో వాహనం ప్రయాణించిన మొత్తం దూరం / ఆయా దశల్లో వాహనం ప్రయాణించిన మొత్తం కాలం

ఈ సూత్రాన్ని సూక్ష్మంగా ఈ విధంగా రాస్తారు.

సగటు వేగం = మొత్తం దూరం/మొత్తం కాలం

మొత్తం దూరం = సగటు వేగం × మొత్తం కాలం

కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలు:

Case (i): వివిధ దశల్లో వాహనం ప్రయాణించిన వేగం స్థిరంగా ఉంటే ఆ స్థిరమైన వేగమే సగటు వేగం అవుతుంది.

ఉదా: ఒక కారు మొదటి 2 గంటలు 60 కేఎంపీహెచ్ వేగంతో, ఆ తర్వాత 180 కి.మీ.ల దూరాన్ని కూడా 60 కేఎంపీహెచ్ వేగంతో ప్రయాణిస్తే ఆ కారు సగటు వేగం ఎంత?

సమాధానం: దత్తాంశం ప్రకారం రెండు దశల్లోనూ కారు వేగం స్థిరంగా ఉంది (60 కేఎంపీహెచ్). కాబట్టి ఈ స్థిరమైన వేగమే సగటు వేగం అవుతుంది.

∴ కారు సగటు వేగం = 60 కేఎంపీహెచ్

Case (ii): వివిధ దశల్లో ప్రయాణం చేసిన కాలాలు సమానంగా ఉంటే సగటు వేగం = ఆయా దశల్లోని వేగాల అంకమధ్యమం.

ఉదా: ఒక వ్యక్తి మొదటి రెండు గంటలు కారులో 90 కేఎంపీహెచ్ వేగంతో, ఆ తర్వాత రెండు గంటలు బస్సులో 60 కేఎంపీహెచ్ వేగంతో, చివరి రెండు గంటలు ఆటోలో 30 కేఎంపీహెచ్ వేగంతో ప్రయాణిస్తే మొత్తం ప్రయాణంలో ఆ వ్యక్తి సగటు వేగం ఎంత?

సమాధానం: **మెథడ్–I**

దత్తాంశం ప్రకారం ఆ వ్యక్తి ప్రయాణించిన మూడు దశల్లోనూ (కారు, బస్సు, ఆటో) ప్రయాణ కాలాలు (2 గంటలు) సమానంగా ఉన్నాయి. కాబట్టి ఆ వ్యక్తి సగటు వేగం = ఆయా దశల్లోని వేగాల అంకమధ్యమం.

= 90, 60, 30 కేఎంపీహెచ్‌ల అంకమధ్యమం

అంకమధ్యమం = రాశుల మొత్తం/రాశుల సంఖ్య

కాబట్టి సగటు వేగం = 90+60+30/ 3

= 180/3 = 60

$\therefore$ ఆ వ్యక్తి సగటు వేగం = 60 కేఎంపీహెచ్

మెథడ్-II

దత్తాంశం ప్రకారం మొత్తం ప్రయాణ కాలం =

2 + 2 + 2 = 6 గంటలు ______ (I)

'దూరం = వేగం × కాలం' సూత్రం ప్రకారం..

ఆ వ్యక్తి కారులో ప్రయాణించిన దూరం =

$90 \times 2 = 180$ కి.మీ.

బస్సులో ప్రయాణించిన దూరం =

$60 \times 2 = 120$ కి.మీ.

ఆటోలో ప్రయాణించిన దూరం =

$30 \times 2 = 60$ కి.మీ.

మూడు దశల్లో ఆ వ్యక్తి ప్రయాణించిన మొత్తం దూరం

= 180 + 120 + 60 = 360 కి.మీ. _____ (II)

సగటు వేగం = మొత్తం దూరం / మొత్తం కాలం

$\therefore$ (I), (II)ల నుంచి సగటు వేగం = 360/6

= 60 కేఎంపీహెచ్

$\therefore$ ఆ వ్యక్తి సగటు వేగం = 60 కేఎంపీహెచ్

Case (iii): వివిధ దశల్లో ఒక వాహనం ప్రయాణించిన దూరాలు సమానంగా ఉంటే ఆయా దశల్లోని వేగాల హరాత్మక మధ్యమమే సగటు వేగం అవుతుంది.

ఉదా: ఒక బస్సు హైదరాబాద్ నుంచి విజయవాడకు 90 కేఎంపీహెచ్ వేగంతో, తిరిగి విజయవాడ నుంచి హైదరాబాద్‌కు 110 కేఎంపీ హెచ్ వేగంతో ప్రయాణిస్తే మొత్తం ప్రయాణానికి సంబంధించి ఆ బస్సు సగటు వేగం ఎంత?

సమాధానం: **మెథడ్-I**

దత్తాంశం ప్రకారం ఆ బస్సు రెండు దశల్లో ప్రయాణించిన దూరాలు సమానంగా ఉన్నాయి కాబట్టి ఆ బస్సు సగటు వేగం = ఆయా దశల్లోని వేగాల హరాత్మక మధ్యమం.

= 90, 110 కేఎంపీహెచ్‌ల హరాత్మక మధ్యమం.

హరాత్మక మధ్యమం =

రాశుల సంఖ్య/రాశుల విలోమాల మొత్తం

కాబట్టి సగటు వేగం = $\frac{2}{\frac{1}{90}+\frac{1}{110}} = \frac{2}{\frac{11+9}{990}}$

$= 2\times\frac{990}{20}$ = 99 కేఎంపీహెచ్

∴ మొత్తం ప్రయాణంలో ఆ బస్సు సగటు వేగం =

99 కేఎంపీహెచ్

మెథడ్-II

హైదరాబాద్, విజయవాడల మధ్య దూరం = x కి.మీ. అనుకుంటే.. రెండు దశల్లో బస్సు ప్రయాణించిన మొత్తం దూరం

= x + x = 2x కి.మీ. ______ (I)

'కాలం = దూరం/వేగం' సూత్రం ప్రకారం బస్సు హైదరాబాద్ నుంచి విజయవాడ చేరడానికి పట్టే కాలం = x/90 గంటలు. తిరిగి విజయవాడ నుంచి హైదరాబాద్‌కు చేరడానికి పట్టే కాలం = x/110 గంటలు

⇒ మొత్తం ప్రయాణ కాలం = x/90 + x/110

$= \frac{11x+9x}{990} = \frac{20x}{990}$

$= \frac{2x}{99}$ గంటలు ______ (II)

సగటు వేగం = మొత్తం దూరం/మొత్తం కాలం

∴ (I), (II)ల నుంచి సగటు వేగం = $\frac{2x}{\frac{2x}{99}}$

$= 2x\times\frac{99}{2x}$ = 99 కేఎంపీహెచ్

∴ ఆ బస్సు సగటు వేగం = 99 కేఎంపీహెచ్

ఉదా: ఒక వ్యక్తి తన కారులో 60 కేఎంపీహెచ్ సగటు వేగంతో 2 గంటల్లో తన ఆఫీసుకు చేరుకున్నాడు. తిరిగి ఆఫీసు నుంచి 40 కేఎంపీహెచ్ సగటు వేగంతో బస్సులో వచ్చాడు. అయితే అతని సగటు వేగం ఎంత?

సమాధానం: 'ప్రయాణించిన దూరం =

సగటు వేగం × కాలం' సూత్రం ప్రకారం ఆఫీసుకి, ఇంటికి మధ్య దూరం = 60 × 2 = 120 కి.మీ.

కాబట్టి ఆ వ్యక్తి ప్రయాణించిన మొత్తం దూరం =

120 + 120 = 240 కి.మీ. ______ (I)

ఆఫీసు నుంచి ఇంటికి చేరడానికి పట్టే కాలం =

$\frac{120}{40} = 3$ గంటలు

$\Rightarrow$ మొత్తం ప్రయాణ కాలం =

2 + 3 = 5 గంటలు ______ (II)

(I), (II)ల నుంచి సగటు వేగం = $\frac{240}{5}$

= 48 కేఎంపీహెచ్

$\therefore$ ఆ వ్యక్తి సగటు వేగం = 48 కేఎంపీహెచ్

నోట్: ఇక్కడ రెండు దశల్లో వ్యక్తి ప్రయాణించిన దూరాలు సమానం కాబట్టి సగటు వేగం = ఆయా దశల్లోని సగటు వేగాల హరాత్మక మధ్యమం అనుకొని కూడా చేయొచ్చు.

ఉదా: ఒక వ్యక్తి మొదటి 60 కి.మీ.ల దూరాన్ని 40 కేఎంపీహెచ్ వేగంతో కారులో, తర్వాత 400 కి.మీ.ల దూరాన్ని 80 కేఎంపీహెచ్ వేగంతో రైలులో, తర్వాత 1600 కి.మీ.ల దూరాన్ని 400 కేఎంపీహెచ్ వేగంతో విమానంలో, చివరి 40 కి.మీ.ల దూరాన్ని 20 కేఎంపీహెచ్ వేగంతో పడవలో ప్రయాణించాడు. అయితే మొత్తం ప్రయాణంలో అతని సగటు వేగం ఎంత?

సమాధానం: దత్తాంశం నుంచి 4 దశల్లో ఆ వ్యక్తి ప్రయాణించిన మొత్తం దూరం =

60 + 400 + 1600 + 40 =

2100 కి.మీ. _____ (I)

'కాలం = దూరం/వేగం' సూత్రం ప్రకారం ఆ వ్యక్తి 4 దశల్లో... కారు, రైలు, విమానం, పడవలో చేసిన ప్రయాణ కాలాలు వరుసగా =

$\frac{60}{40}, \frac{400}{80}, \frac{1600}{400}, \frac{40}{20}$ గంటలు

= 1.5, 5, 4, 2 గంటలు

$\Rightarrow$ మొత్తం ప్రయాణ కాలం =

1.5 + 5 + 4 + 2 = 12.5 గంటలు _____ (II)

$\therefore$ (I), (II)ల నుంచి సగటు వేగం = $\frac{2100}{12.5}$

= 168 కేఎంపీహెచ్

కాబట్టి ఆ వ్యక్తి సగటు వేగం = 168 కేఎంపీహెచ్

ఉదా: ఒక సైక్లిస్ట్ తను ప్రయాణించాల్సిన మొత్తం దూరంలో 50% దూరాన్ని 50 కేఎంపీహెచ్ వేగంతో, 30% దూరాన్ని 30 కేఎంపీహెచ్ వేగంతో, మిగిలిన దూరాన్ని 15 నిమిషాల్లో ప్రయాణిస్తే, అతడి సగటు వేగం ఎంత?

సమాధానం: సాధారణత కోల్పోకుండా సైక్లిస్ట్ ప్రయాణించాల్సిన మొత్తం దూరం = 100 కి.మీ. అనుకుంటే... _____(I)

మొదటి దశలో 50% దూరం అంటే 50 కి.మీ.లను ప్రయాణించడానికి పట్టే కాలం = దూరం/వేగం
= 50/50 = 1 గంట
రెండో దశలో 30% దూరం అంటే 30 కి.మీ.లను ప్రయాణించడానికి పట్టే కాలం =
30/30 = 1 గంట
మూడో దశలో మిగిలిన దూరం అంటే 100–(50+30) = 20 కి.మీ.లను ప్రయాణించడానికి పట్టిన కాలం = 15 నిమిషాలు
= 0.25 గంటలు
⇒ మొత్తం ప్రయాణ కాలం = 1 + 1 + 0.25
= 2.25 గంటలు ______ (II)
⇒ (I), (II)ల నుంచి సగటు వేగం =

$$\frac{100}{2.25} = 44.44$$

∴ సైక్లిస్ట్ సగటు వేగం = **44.44** కేఎంపీహెచ్

ఉదా: ఒక బస్సు హైదరాబాద్ నుంచి విజయవాడకు వెళ్లి తిరిగి మళ్లీ హైదరాబాద్‌కి వస్తే ఒక ట్రిప్ పూర్తి అయినట్లు. ఈ విధంగా ఆ బస్సు 90 కేఎంపీహెచ్ సగటు వేగంతో 5 ట్రిప్‌లను 30 గంటల్లో పూర్తి చేసింది. అయితే హైదరాబాద్, విజయవాడల మధ్య దూరం ఎంత?
సమాధానం: హైదరాబాద్, విజయవాడల మధ్య దూరం = 'd' కి.మీ. అనుకుంటే.. ఒక ట్రిప్‌లో ప్రయాణించే దూరం = d + d = 2d కి.మీ.
మొత్తం 5 ట్రిప్పుల్లో ప్రయాణించిన మొత్తం దూరం = 2d × 5 = 10d కి.మీ. ______ (I)
మొత్తం ప్రయాణించిన దూరం =
సగటు వేగం × మొత్తం ప్రయాణ కాలం
= 90 × 30 = 2700 కి.మీ. ______ (II)
(I), (II)ల నుంచి 10d = 2700

$$\Rightarrow d = \frac{2700}{10} = 270$$

∴ హైదరాబాద్, విజయవాడల మధ్య దూరం =
270 కి.మీ.
ఉదా:
ఒక వ్యక్తి మొదటి 1/20 కి.మీ.ల దూరాన్ని 9 కేఎంపీహెచ్ వేగంతో 2వ, 3వ, 4వ 1/20 కి.మీ.ల దూరాలను వరుసగా 12, 18, 36 కేఎంపీహెచ్ వేగాలతో ప్రయాణించాడు. అయితే మొత్తం దూరాన్ని ఆ వ్యక్తి 18.75 కేఎంపీహెచ్ సగటు వేగంతో ప్రయాణించాడన్నది 'A' వాదన. 14.4 కేఎంపీహెచ్ సగటు

వేగంతో ప్రయాణించాడన్నది 'B' వాదన. ఎవరి వాదన సరైందో విశ్లేషించండి.

సమాధానం: అంకమధ్యమం =

రాశుల మొత్తం/రాశుల సంఖ్య

నాలుగు దశల్లోని ఆ వ్యక్తి వేగాల అంకమధ్యమం =

$$\frac{9+12+18+36}{4} = \frac{75}{4} = 18.75$$

వేగాల అంకమధ్యమం = 18.75 కేఎంపీహెచ్.

ఇచ్చిన దత్తాంశంలో 'A' అంకమధ్యమాన్ని ఉపయోగించి సగటు వేగాన్ని కనుగొన్నాడని అర్థమవుతుంది. కానీ ఆయా దశల్లోని ప్రయాణ కాలాలు సమానంగా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే అంకమధ్యమం సగటు వేగం అవుతుంది. దత్తాంశంలో ఆయా దశల్లో ప్రయాణించిన దూరాలు సమానంగా ఉన్నాయి కాబట్టి ఇక్కడ సగటు వేగాన్ని కనుక్కోవడానికి హరాత్మక మధ్యమాన్ని వాడాలి.

సగటు వేగం = 9, 12, 18, 36 కేఎంపీహెచ్‌ల హరాత్మక మధ్యమం.

$$= \frac{4}{\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}}$$

$$= \frac{4}{\frac{4+3+2+1}{36}} = 4\times\frac{36}{10} = 14.4$$

∴ ఆ వ్యక్తి సగటు వేగం = 14.4 కేఎంపీహెచ్ దత్తాంశంలోని సందర్భంలో సగటు వేగాన్ని కనుక్కోవడానికి సరైన గణాంక కొలత హరాత్మక మధ్యమం. కాబట్టి సగటు వేగం = 14.4 కేఎంపీహెచ్ అనే 'B' వాదన సరైంది.

కాలం-దూరం-4

సగటు - మైలేజీ

గత శీర్షికలో సగటు వేగం గురించి చర్చించాం. ఈ శీర్షికలో సగటు మైలేజీ గురించి తెలుసుకుందాం.

మైలేజీ:

ఎ) మైలేజీ = ప్రయాణించిన దూరం / వాడిన ఇంధనం

సాధారణంగా మైలేజీ ప్రమాణాలు - KMPL అంటే కిలోమీటరు/లీటరు. ఒక లీటరు ఇంధనంతో ఆ వాహనం ఎన్ని కిలోమీటర్ల దూరాన్ని ప్రయాణిస్తుందో మైలేజీ తెలుపుతుంది. మైలేజీకి కిలోమీటరు/గ్యాలను లేదా మైలు/గ్యాలను మొదలైన ప్రమాణాలు కూడా వాడుతారు.

బి) ప్రయాణించిన దూరం= మైలేజీ × వాడిన ఇంధనం

సి) వాడిన ఇంధనం=ప్రయాణించిన దూరం / మైలేజీ

ఉదా: ఒక కారు 20 KMPL మైలేజీతో 500 km ప్రయాణించాలంటే ఎంత ఇంధనం అవసరం?

సమాధానం:

వాడిన ఇంధనం = 500/20 = 25 లీటర్లు.

∴ సమాధానం = 25 లీటర్లు.

సగటు మైలేజీ:

సగటుమైలేజీ=వివిధ దశల్లో ప్రయాణించిన మొత్తం దూరం / వివిధ దశల్లో వాడిన మొత్తం ఇంధనం

ఈ సూత్రాన్నే సూక్ష్మంగా ఈ విధంగా కూడా రాయొచ్చు.

ఎ) సగటు మైలేజీ = మొత్తం దూరం/ మొత్తం ఇంధనం

బి) మొత్తం దూరం = సగటు మైలేజీ × మొత్తం ఇంధనం

సి) మొత్తం ఇంధనం = మొత్తం దూరం/ సగటు మైలేజీ

case(i): ప్రతి దశలో మైలేజీ స్థిరంగా ఉంటే ఆ స్థిరమైన మైలేజీ సగటు మైలేజీ అవుతుంది.

ఉదా: ఒక వాహనం మొదటి 500 kmల దూరాన్ని 50 KMPL మైలేజీతో, తర్వాత 95 kmల దూరాన్ని 50 KMPL మైలేజీతో, చివరి 15 km ల దూరాన్ని కూడా 50 KMPL మైలేజీతో ప్రయాణిస్తే ఆ వాహనం సగటు మైలేజీ ఎంత?

సమాధానం:

మూడు దశల్లో ప్రతి దశలో కూడా ఆ వాహనం మైలేజీ స్థిరంగా (50 KMPL) ఉంది.

∴ సగటు మైలేజీ = 50 KMPL

case ii: వివిధ దశల్లో వాడిన ఇంధనం స్థిరంగా ఉంటే, ఆయా దశల్లోని మైలేజీల అంకమధ్యమమే సగటు మైలేజీ అవుతుంది.

ఉదా: ఒక కారు 5 లీటర్ల ఇంధనం వాడి 45 KMPL మైలేజీతో ప్రయాణించింది. రెండో దశలో 5 లీటర్ల ఇంధనం వాడి 40 KMPL మైలేజీతో, చివరి దశలో కూడా 5 లీటర్ల ఇంధనం వాడి 55 KMPL మైలేజీతో ప్రయాణం చేసింది. మొత్తం ప్రయాణానికి సంబంధించి సగటు మైలేజీ ఎంత?

సమాధానం:

Method - I

దత్తాంశం ప్రకారం, మూడు దశల్లో కూడా వాడిన ఇంధన పరిమాణం సమానంగా (5 లీటర్లు) ఉంది. కాబట్టి

సగటు మైలేజీ = ఆయా దశల్లోని మైలేజీల అంకమధ్యమం అవుతుంది.

= 45, 40, 55ల అంకమధ్యం

అంక మధ్యమం = రాశుల మొత్తం/ రాశుల సంఖ్య

ఈ సూత్రం ప్రకారం సగటు మైలేజీ =

$$\frac{45 + 40 + 55}{3} = 140/3 = 46.66$$

∴ సగటు మైలేజీ = 46.66 KMPL

Method - II

అంకమధ్యమాన్ని ఉపయోగించకుండా ప్రాథమిక సూత్రాన్ని అనుసరించి కూడా చేయొచ్చు.

దత్తాంశం ప్రకారం మూడు దశల్లో వాడిన మొత్తం ఇంధనం

= 5 + 5 + 5 = 15 లీటర్లు .... (1)

'ప్రయాణించిన దూరం = మైలేజీ × వాడిన ఇంధనం' సూత్రం ప్రకారం –

మొదటి దశలో ప్రయాణించిన దూరం =

45 × 5 = 225 km

రెండో దశలో దూరం = 40 × 5 = 200 km

మూడో దశలో దూరం = 55×5 = 275 km

⇒ మొత్తం దూరం = 225 + 200 + 275

= 700 km ....(2)

సగటు మైలేజీ = మొత్తం దూరం/ మొత్తం ఇంధనం

$\therefore$ (1) & (2) ల నుంచి సగటు మైలేజీ = 700/15 = 46.66 KMPC

మొత్తం ప్రయాణానికి సంబంధించి ఆ కారు సగటు మైలేజీ = 46.66 KMPC

Note: అడిగిన ప్రశ్న, దానికి కేటాయించిన మార్కులను బట్టి పై రెండు పద్ధతుల్లో ఏ విధంగా అయినా చేయవచ్చు.

case iii:

వివిధ దశల్లో ప్రయాణించిన దూరాలు స్థిరంగా ఉంటే ఆయా దశల్లోని మైలేజీల హరాత్మక మధ్యమమే సగటు మైలేజీ.

ఉదా: ఒక కారు A నుంచి Bకి 40 KMPL మైలేజీతో, తిరిగి B నుంచి Aకి 60 KMPL మైలేజీతో ప్రయాణం చేసింది. A, B ల మధ్య దూరం 120కి.మీ. ఐతే మొత్తం ప్రయాణంలో ఆ కారు సగటు మైలేజీ ఎంత?

సమాధానం:

Method - I

దత్తాంశం ప్రకారం రెండు దశల్లో కారు ప్రయాణించిన దూరం స్థిరంగా ఉంది. కాబట్టి ఆ కారు సగటు మైలేజీ = ఆయా దశల్లోని మైలేజీల హరాత్మక మధ్యమం = 40, 60ల హరాత్మక మధ్యమం

హరాత్మక మధ్యమం= రాశుల సంఖ్య / రాశుల విలోమాల మొత్తం

$\therefore$ సగటు మైలేజీ $= \frac{2}{\frac{1}{40}+\frac{1}{60}} = \frac{2}{\frac{3+2}{120}}$

$2\times\frac{120}{5} = 48$ KMPL

Note: ఈ పద్ధతిలో కారు ప్రయాణించిన A, Bల మధ్య దూరం=120 km అనే విషయానికి ఎటువంటి ప్రాధాన్యం లేదు. 120 kmలకు బదులు ఏ ఇతర సంఖ్య ఉన్నా కూడా సగటు మైలేజీ = 48 KMPL వస్తుంది. అంటే రెండు దశల్లో ప్రయాణించి దూరాలు సమానంగా ఉంటే చాలు.ఆ దూరం ఎంత అనేది అప్రధానం.

Method - II

దత్తాంశం ప్రకారం, రెండు దశల్లో కారు ప్రయాణించిన మొత్తం దూరం =
120+120 = 240 km ....(1)

వాడిన ఇంధనం =

ప్రయాణించిన దూరం/ మైలేజీ

$\Rightarrow$ మొదటి దశలో A నుంచి Bకి ప్రయాణించడానికి వాడిన ఇంధనం = 120/40 = 3 లీటర్లు.

రెండో దశలో B నుంచి Aకి ప్రయాణించడానికి వాడిన ఇంధనం = 120/60 = 2 లీటర్లు

$\Rightarrow$ మొత్తం ఇంధనం = 3 + 2 = 5 ....(2)

సగటు మైలేజీ = మొత్తం దూరం/ మొత్తం ఇంధనం

(1) & (2) ల నుంచి సగటు మైలేజీ 240/5 = 48 KMPL

మొత్తం ప్రయాణంలో కారు సగటు మైలేజీ =48 KMPL

ఉదా: ఒక వ్యక్తి A నుంచి Bకి 20 miles/gallon మైలేజీతో, తిరిగి B నుంచి Aకి 24 miles/gallon మైలేజీతో ప్రయాణించాడు. ఐతే ఆ వ్యక్తి సగటు మైలేజీ కనుక్కోవడానికి ఏ గణాంకపు కొలత సరిపోతుందో పేర్కొని సమాధానాన్ని సరి చూడండి?

సమాధానం:

దత్తాంశంలో వ్యక్తి రెండు దశల్లోనూ ప్రయాణించిన దూరాలు సమానంగా ఉన్నాయి కాబట్టి సగటు మైలేజీ కనుక్కోవడానికి హరాత్మక మధ్యమం సరైన గణాంకపు కొలత అవుతుంది.

$\therefore$ సగటు మైలేజీ = 20, 24ల హరాత్మక మధ్యమం

$$= \frac{2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{24}} = \frac{2}{\frac{6+5}{120}}$$

$$2\times\frac{120}{11} = 21.81 \text{ Miles / gallon}$$

సమాధానాన్ని సరిచూడడం

A, Bల మధ్య దూరం = 'd' miles అనుకోండి.

అప్పుడు మొత్తం దూరం = d + d = 2d miles ....(1)

'A' నుంచి 'B'కి ప్రయాణించడానికి కావలసిన ఇంధనం = దూరం/మైలేజీ

= d/20 gallons

అలాగే 'B' నుంచి 'A' కి ప్రయాణించడానికి కావలసిన ఇందనం

= d/24 gallons

$\Rightarrow$ మొత్తం ఇంధనం $= \frac{d}{20}+\frac{d}{24}$

$$= \frac{6d+5d}{120} = \frac{11d}{120} \text{ gallons ....(2)}$$

(1) & (2) ల నుంచి సగటు మైలేజీ

$$= \frac{2d}{\frac{11d}{120}} = 2d\times\frac{120}{11d} = \frac{240}{11}$$

= 21.81 Miles/gallon

కాబట్టి ఈ సందర్భంలో హరాత్మక మధ్యమం సరైన గణాంకపు కొలత అని నిర్ధారించొచ్చు.

ఉదా: ఒక కారు మూడు దశల్లో ఈ విధంగా ప్రయాణించింది.

ఎ) మొదటి దశలో 1 1/2 గంటలు పాటు, 40 KMPH వేగంతో 60 KMPL మైలేజీతో ప్రయాణించింది.

బి) తరువాత 2 గంటల పాటు 60 KMPH వేగంతో 50 KMPL మైలేజీతో ప్రయాణించింది.

సి) చివరి 1 గంట 50 KMPH వేగంతో 40 KMPL మైలేజీతో ప్రయాణించింది.

ఐతే మొతం ప్రయాణానికి సంబంధించి ఆ కారు సగటు వేగం, సగటు మైలేజీలను కనుక్కోండి.

సమాధానం:

సగటు వేగం

దత్తాంశం నుంచి మూడు దశల్లో కారు మొత్తం ప్రయాణకాలం = 1.5+2+1=4.5 గంటలు ....(1)

మొదటి దశలో కారు ప్రయాణించిన దూరం =

కాలం × వేగం

1.5 × 40 = 60 km;

రెండో దశలో దూరం = 2×60 = 120 km;

మూడో దశలో దూరం= 1×50=50 km

మూడు దశల్లో కారు ప్రయాణించిన మొత్తం దూరం = 60+120+50= 230 km ....(2)

(1) & (2) ల నుంచి సగటు వేగం =

మొత్తం దూరం/మొత్తం కాలం

= 230/4.5 = 51.11

∴ మొత్తం ప్రయాణంలో కారు సగటు వేగం = 51.11 KMPH.

సగటు మైలేజీ:

మొదటి దశలో వినియోగించిన ఇంధనం

= ప్రయాణించిన దూరం/ మైలేజీ

= 60/60 = 1 లీటరు.

రెండో దశలో ఇంధనం = 120/50 = 2.4 లీటర్లు.

మూడో దశలో ఇంధనం = 50/40 = 1.25 లీటర్లు

= మూడు దశల్లో వినియోగించిన మొత్తం ఇంధనం = 1 + 2.4 + 1.25 = 4.65 లీటర్లు .... (3)

∴ (2) & (3) ల నుంచి సగటు మైలేజీ

= మొత్తం దూరం/ మొత్తం ఇంధనం

= 230/4.65 = 49.46 KMPL

∴ మొత్తం ప్రయాణంలో కారు సగటు మైలేజీ = 49.46 KMPL

కాలం-పని-1

ప్రతి పోటీ పరీక్షలో కూడా 'కాలం-పని' అనే అంశం నుంచి ప్రశ్నలు తప్పనిసరిగా అడుగుతారు.

కాలం-పని:

కాలం, పనికి సంబంధించి ముఖ్యంగా 3 అంశాలు ఉంటాయి. అవి:

1)పని చేసే మనుషులు లేదా యంత్రాలు

2)**పని చేయడానికి పట్టే కాలం:** నెలలు, రోజులు, గంటలు, నిమిషాలు మొదలైనవి

3)పని పరిమాణం

పనికి ఎటువంటి ప్రమాణాలూ లేవు. కాబట్టి పనిని సాధారణంగా యూనిట్లలో చెప్పొచ్చు.

1)ఒక పూర్తి పనిని ఒక యూనిట్‌గా పరిగణిస్తారు. ఒక మనిషి ఒక పనిని పూర్తి చేయడానికి పట్టే కాలం 't' రోజులు. అయితే

అతడు ఒక్కరోజులో చేసే పని $= \frac{1}{t}$ యూనిట్లు

2)ఒక వ్యక్తి ఒక్కరోజులో చేసే పని $= \frac{1}{t}$ యూనిట్లు. అయితే 'n' యూనిట్ల పని చేయడానికి అతడికి పట్టే కాలం $= n \times t$ రోజులు

3)ఒక పనిని A, B అనే ఇద్దరు వ్యక్తులు వరుసగా t_1, t_2 రోజుల్లో పూర్తి చేయగలిగితే, ఇద్దరు కలిసి

ఆ పనిని పూర్తి చేయడానికి పట్టే కాలం $T = \frac{t_1 \times t_2}{t_1 + t_2}$ రోజులు

అలాగే $t_2 = \frac{t_1 \times T}{t_1 - T}$ రోజులు

4)ఒక పనిని A, B, C అనే ముగ్గురు వ్యక్తులు వరు సగా t_1, t_2, t_3 రోజుల్లో పూర్తి చేయగలిగితే..

ముగ్గురు కలిసి ఆ పనిని పూర్తి చేయడానికి పట్టే కాలం (T):

$$T = \frac{t_1 \times t_2 \times t_3}{t_1 \times t_2 + t_2 \times t_3 \times t_3 \times t_1}$$ రోజులు

అలాగే

$$t_3 = \frac{t_1 \times t_2 \times T}{t_1 \times t_2 - t_2 \times T - T \times t_1}$$ రోజులు

ఉదాహరణ 1

ఒక పనిని పూర్తి చేయడానికి A, Bలకు వరుసగా 20, 30 రోజులు పడుతుంది. ఇద్దరు కలిసి పనిచేస్తే ఆ పని ఎన్ని రోజుల్లో పూర్తవుతుంది?

ఎ) 15 బి) 25 సి) 12డి) 18

సమాధానం

$t_1 = 20, t_2 = 30$

$$T = \frac{t_1 \times t_2}{t_1 + t_2}$$ అనే సూత్రాన్ననుసరించి

$$T = \frac{20 \times 30}{20 + 30} = \frac{600}{50} = 12$$ రోజులు

∴ A, Bలు ఇద్దరు కలిసి ఆ పనిని 12 రోజుల్లో పూర్తి చేస్తారు.

∴ సమాధానం: సి

ఉదాహరణ 2

ఒక పనిని A, Bలు కలిసి 6 రోజుల్లో పూర్తి చేయగలరు. అదే పనిని A ఒక్కడు 10 రోజుల్లో పూర్తి చేయగలడు. అయితే ఆ పనిని B ఒక్కడు పూర్తి చేయడానికి పట్టే రోజుల సంఖ్య?

ఎ) 8 బి) 15

సి) 12 డి) 16

సమాధానం

$T = 6, t_1 = 10$

$$t_2 = \frac{t_1 \times T}{t_1 - T}$$

అనే సూత్రాన్ననుసరించి

$$t_2 = \frac{6 \times 10}{10 - 6} = \frac{60}{4} = 15$$

రోజులు

∴ సమాధానం: బి

ఉదాహరణ 3

A, B, C అనే ముగ్గురు వ్యక్తులు కలిసి ఒక పనిని 3 రోజుల్లో పూర్తి చేయగలరు. అదే పనిని A, Bలు వరుసగా 15, 6 రోజుల్లో పూర్తి చేయగలరు. అయితే అంతకు రెట్టింపు పనిని C ఒక్కడు ఎన్ని రోజుల్లో పూర్తి చేయగలడు?

ఎ) 20 బి) 5 సి) 18 డి) ఏదీకాదు

సమాధానం

$T = 3, t_1 = 15, t_2 = 6$

$$t_3 = \frac{t_1 \times t_2 \times T}{t_1 \times t_2 - t_2 \times T - T \times t_1}$$

అనే సూత్రాన్ననుసరించి

$$t_3 = \frac{15 \times 6 \times 3}{15 \times 6 - 6 \times 3 - 3 \times 15}$$

= 10 రోజులు

అంటే Cకి ఆ పనిని (ఒక యూనిట్ పని) చేయడానికి పట్టే కాలం 10 రోజులు.

∴ అంతకు రెట్టింపు పనిని (రెండు యూనిట్ల పని) చేయడానికి పట్టే కాలం = 2 × 10 = 20 రోజులు

∴ సమాధానం: ఎ

ఇటువంటి ప్రశ్నలను నేరుగా కింది సూత్రంతో కూడా సాధించవచ్చు

$$\boxed{t_3 = \frac{n \times t_1 \times t_2 \times T}{t_1 \times t_2 - t_2 \times T - T \times t_1}}$$

'n' అంటే చేయవలసిన పని యూనిట్లలో

ఈ ప్రశ్నలో n = 2

ఒకవేళ సగం పని అని అంటే $n = \frac{1}{2}$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 4

ఒక పనిని A, Bలు కలిసి 12 రోజుల్లో, B, Cలు కలిసి 15 రోజుల్లో, C, Aలు కలిసి 20 రోజుల్లో చేయగలరు. అయితే A, B, C ముగ్గురు కలిసి ఆ పనిని ఎన్ని రోజుల్లో పూర్తి చేయగలరు?

ఎ) 10 బి) 7 సి) 8 డి) 9

సమాధానం

$(A + B)$ల ఒక్కరోజు పని $= \frac{1}{12}$

$(B + C)$ల ఒక్కరోజు పని $= \frac{1}{15}$

$(C + A)$ల ఒక్కరోజు పని $= \frac{1}{20}$

పై మూడింటిని కలుపగా

$2(A + B + C)$ల ఒక్కరోజు పని

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

$\therefore$ $(A + B + C)$ల ఒక్కరోజు పని $= \frac{1}{10}$

$\therefore$ A, B, C ముగ్గురు కలిసి ఆ పనిని చేయడానికి 10 రోజులు పడుతుంది.

$\therefore$ **సమాధానం:** ఎ

కాలం-పని-2

W_1 పని, M_1 వ్యక్తులు, ఒక్కొక్కరు E_1 సామర్థ్యంతో, D_1 రోజుల్లో చేసి; W_2 పనిని, M_2 వ్యక్తులు, ఒక్కొక్కరు E_2 సామర్థ్యంతో, D_2 రోజుల్లో చేయగలిగితే

$$\boxed{\frac{M_1 \times E_1 \times D_1}{W_1} = \frac{M_2 \times E_2 \times D_2}{W_2}}$$

E అంటే సామర్థ్యం లేదా నైపుణ్యం (Efficiency). ఒకవేళ ఇచ్చిన ప్రశ్నలో లేదా దత్తాంశంలో వ్యక్తుల సామర్థ్యం గురించి చెప్పకపోతే, అందరు వ్యక్తుల సామర్థ్యం సమానం అని భావించాలి. అప్పుడు

$$\boxed{\frac{M_1 \times D_1}{W_1} = \frac{M_2 \times D_2}{W_2}}$$

రెండు సందర్భాల్లో పని సమానం అయితే, అంటే $W_1 = W_2$ అయితే

$$\boxed{M_1 \times D_1 = M_2 \times D_2}$$

పై మూడు సూత్రాలను అభ్యర్థులు అవగాహన చేసుకొని కచ్చితంగా గుర్తుంచుకోవాలి. ఏ సూత్రం ఎప్పుడు వాడాలి అనేది జాగ్రత్తగా గమనించాలి.

ఉదాహరణ 1: 'A' ఒక పనిని '12' రోజుల్లో చేయగలడు. 'A' కంటే 'B' కి 50 శాతం నైపుణ్యం ఎక్కువ. అయితే అదే పనిని 'B' ఎన్ని రోజుల్లో చేయగలడు?

ఎ) 6 బి) 9 సి) 8 డి) 10

సమాధానం

'A'కి సంబంధించి:

W_1=1, D_1=12, M_1=1, E_1=100 అనుకొనుము.

'B'కి సంబంధించి:

W_1=1, D_2=?, M_2=1, E_2=150

ఎందుకంటే 'A' కంటే 'B'కి 50 శాతం నైపుణ్యం ఎక్కువ కాబట్టి

$$\frac{M_1 \times E_1 \times D_1}{W_1} = \frac{M_2 \times E_2 \times D_2}{W_2}$$

అనే సూత్రాన్ని అనుసరించి

$$\frac{1\times100\times12}{1}=\frac{1\times150 + D_2}{1}$$

$\Rightarrow 100 \times 12 = 150 \times D_2$

$\Rightarrow D_2 = 8$

$\therefore$ **సమాధానం: సి**

ఉదాహరణ 2:16 మంది 100 జతల బట్టలను 12 రోజుల్లో కుట్టగలరు. అయితే 12 మంది 150 జతల బట్టలను ఎన్ని రోజుల్లో కుట్టగలరు?

ఎ) 24 బి) 20 సి) 18 డి) 16

సమాధానం

ఒక జత బట్టలు కుట్టడాన్ని ఒక యూనిట్ పని అనుకొందాం. అప్పుడు

$W_1 = 100, M_1 = 16, D_1 = 12,$

$W_2 = 150, M_2 = 12, D_2 = ?$

$$\frac{M_1 \times D_1}{W_1} = \frac{M_2 \times D_2}{W_2}$$

అనే సూత్రం ప్రకారం

$$\frac{16\times12}{100}=\frac{12\times D_2}{150}$$

$\Rightarrow D_2 = 24$

$\therefore$ **సమాధానం: ఎ**

ఉదాహరణ 3: 12 మంది ఒక పనిని 18 రోజుల్లో చేస్తారు. వారు 6 రోజులు పని చేసిన తర్వాత మరో నలుగురు పనిలో చేరారు. అయితే మిగిలిన పని ఎన్ని రోజుల్లో పూర్తి అవుతుంది?

ఎ) 6 బి) 9 సి) 10 డి) 8

సమాధానం

మిగిలిన పనికి సంబంధించి:

12 మంది, 12 రోజుల్లో చేస్తారు.

12 + 4 = 16 మంది ఎన్ని రోజుల్లో చేస్తారు?

$$M_1 \times D_1 = M_2 \times D_2$$

అనే సూత్రం ప్రకారం $12 \times 12 = 16 \times D_2$

$\Rightarrow D_2 = 9$

$\therefore$ సమాధానం: బి

ఉదాహరణ 4:

ఒక పనిని A, B లు వరుసగా 15, 10 రోజుల్లో పూర్తిచేస్తే వారి ఒక్క రోజు సగటు పని ఎంత?

ఎ) $\frac{2}{25}$ బి) $\frac{1}{13}$ సి) $\frac{1}{14}$ డి) $\frac{1}{12}$

సమాధానం

వ్యక్తుల ఒక్కరోజు సగటు పని

$$= \frac{\text{వ్యక్తుల ఒక్కరోజు పనుల మొత్తం}}{\text{వ్యక్తుల సంఖ్య}}$$

$$= \frac{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}}{2} = \frac{1}{12}$$

$\therefore$ సమాధానం: డి

ఉదాహరణ 5: **ఒక పనిని A, B లు వరుసగా 50, 10 రోజుల్లో చేయగలరు. A ఆ పనిని ప్రారంభిం చిన కొన్ని రోజుల తర్వాత B పనిలో చేరాడు. మొత్తం మీద ఆ పని 45 రోజుల్లో పూర్తయింది. అయితే B ఎన్ని రోజులు పనిచేశాడు?**

ఎ) 2 బి) 3 సి) 1 డి) 4

సమాధానం

దత్తాంశం ప్రకారం పూర్తి కాలం అంటే 45 రోజుల పాటు పని చేసిన వ్యక్తి A.

45 రోజుల్లో A చేసే పని

$$= 45 \times \frac{1}{50} = \frac{9}{10}$$

మొత్తం పని 1 యూనిట్ కాబట్టి, A చేయగా మిగిలిన పని $= 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

ఇందుకు ఆకి ఒక్కరోజు పడుతుంది.

$\therefore$ సమాధానం: సి

పని - కాలం-3

ఉదాహరణ 1

ఒక పనిని A, Bలు వరుసగా 25, 20 రోజుల్లో చేయగలరు. ఇద్దరు కలిసి పనిని ప్రారంభించిన 5 రోజుల తర్వాత 'A' పని మానేశాడు. మిగిలిన పనిని 'B' ఎన్ని రోజుల్లో పూర్తి చేయగలడు?

ఎ) 16 బి) 11 సి) 9 డి) 15

సమాధానం: బి

5 రోజుల్లో A చేసే పని $= 5 \times \frac{1}{25} = \frac{1}{5}$

A చేయగా మిగిలిన పని

$$= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = \frac{16}{20}$$

∴ మొత్తం మీద 'B' 16 రోజులు పని చేశాడు. కాబట్టి మిగిలిన పనిని 'B' 16 – 5 = 11 రోజుల్లో చేస్తాడు.

ఉదాహరణ 2

9 మంది పురుషులు, 12 మంది స్త్రీలు కలిసి ఒక పనిని 12 రోజుల్లో చేయగలరు. అదే పనిని 12 మంది పురుషులు, 12 మంది స్త్రీలు కలిసి 10 రోజుల్లో చేయగలరు. అయితే 30 మంది పురుషులు ఆ పనిని ఎన్ని రోజుల్లో చేయగలరు?

ఎ) 9 బి) 8 సి) 7 డి) 6

సమాధానం: డి

12 మంది పురుషులు + 12 మంది స్త్రీల ఒక్కరోజు పని $= \frac{1}{10}$ ... (1)

9 మంది పురుషులు + 12 మంది స్త్రీల ఒక్కరోజు పని $= \frac{1}{12}$ ... (2)

(1) – (2) చేయగా,

ముగ్గురు పురుషుల ఒక్కరోజు పని

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{1}{60}$$

$\Rightarrow$ 30 మంది పురుషుల ఒక్కరోజు పని $= \frac{1}{60} \times 10 = \frac{1}{6}$

$\therefore$ 30 మంది పురుషులు ఆ పనిని చేయడానికి 6 రోజులు పడుతుంది.

ఉదాహరణ 3

16 మంది ఒక పనిని 25 రోజుల్లో చేయగలరు. ఒక్క మనిషి పని ఇద్దరు బాలుర పనితో సమానం. అయితే 40 మంది బాలురు అదే పనిని ఎన్ని రోజుల్లో చేయగలరు?

ఎ) 20 బి) 10 సి) 40డి) 30

సమాధానం: ఎ

40 మంది బాలురు = 20 మంది మనుషులు

$M_1 \times D_1 = M_2 \times D_2$ అనే సూత్రం ప్రకారం

$16 \times 25 = 20 \times D_2$

$\Rightarrow D_2 = 20$

ఉదాహరణ 4

ఒక నీటి ట్యాంకును రెండు పంపులు వరుసగా 25, 50 నిమిషాల్లో నింపగలవు. రెండు పంపులు ఒకేసారి పనిచేయడం ప్రారంభిస్తే ఆ నీటి ట్యాంకు ఎంతసేపట్లో నిండుతుంది?

ఎ) 20 బి) 15 సి) $16\frac{2}{3}$ డి) 16

సమాధానం: సి

ఇక్కడ నీటి పంపులు ట్యాంకును నింపడాన్ని కూడా పనిలాగే భావించాలి.

$T = \frac{t_1 \times t_2}{t_1 + t_2}$ అనే సూత్రాన్ననుసరించి

$$= \frac{25 \times 50}{25 + 50} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

ఉదాహరణ 5

ఒక నీటి ట్యాంకును ‘A’ అనే పంపు 20 నిమిషాల్లో నింపగలదు. ‘B’ అనే పంపు అదే నీటి ట్యాంకును 30 నిమిషాల్లో ఖాళీ చేయగలదు. రెండు పంపులు ఒకేసారి పనిచేయడం ప్రారంభిస్తే ఆ ట్యాంకు ఎంత సమయంలో నిండుతుంది?

ఎ) 50 ని॥లు బి) 60 ని॥లు

సి) 40 ని॥లు డి) 45 ని॥లు

సమాధానం: బి

దత్తాంశంలో ‘A’ అనే పంపు పని ధనాత్మకం అయితే, ‘B’ పని ఋణాత్మకం అవుతుంది.

$\therefore$ నిమిషానికి ‘A’ పని $= +\frac{1}{20}$

‘B’ పని $= -\frac{1}{30}$

$\Rightarrow$ నిమిషానికి $(A + B)$ల పని

$$= \frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{1}{60}$$

$\therefore$ రెండు పంపులు కలిసి 60 నిమిషాల్లో నీటి ట్యాంకును నింపగలవు.

Direct formula:

ఇలాంటి ప్రశ్నలకు కింది సూత్రాన్ని ఉపయోగించి సులభంగా సమాధానాన్ని రాబట్టవచ్చు.

$$T = \frac{t_1 \times t_2}{t_2 - t_1}$$

ఉదాహరణ 6

లీకేజీ ఉన్న కారణంగా ఒక ఒక పంపు నీళ్ల ట్యాంకును 36 గంటల్లో నింపుతుంది. లీకు అవుతున్న నీరు పంపులో వస్తున్న నీటిలో సగం. లీకేజీ లేనట్లయితే ఆ పంపు నీళ్ల ట్యాంకును ఎంతసేపట్లో నింపుతుంది?

ఎ) 18 గంటలు బి) 24 గంటలు

సి) 27 గంటలు డి) 30 గంటలు

సమాధానం: ఎ

పంపులోని సగం నీరు లీకు అవుతుందంటే ఆ పంపు 50 శాతం సామర్థ్యంతో పని చేస్తున్నట్లు. లీకేజీ

లేకుంటే 100 శాతం సామర్థ్యంతో పని చేస్తుంది.

$\therefore D_1 \times E_1 = D_2 \times E_2$ అనే సూత్రం ప్రకారం (ఇక్కడ D అంటే కాలం గంటల్లో తీసుకుంటాం)

$\Rightarrow 36 \times 50 = D_2 \times 100$

$\Rightarrow D_2 = 18$ గంటలు

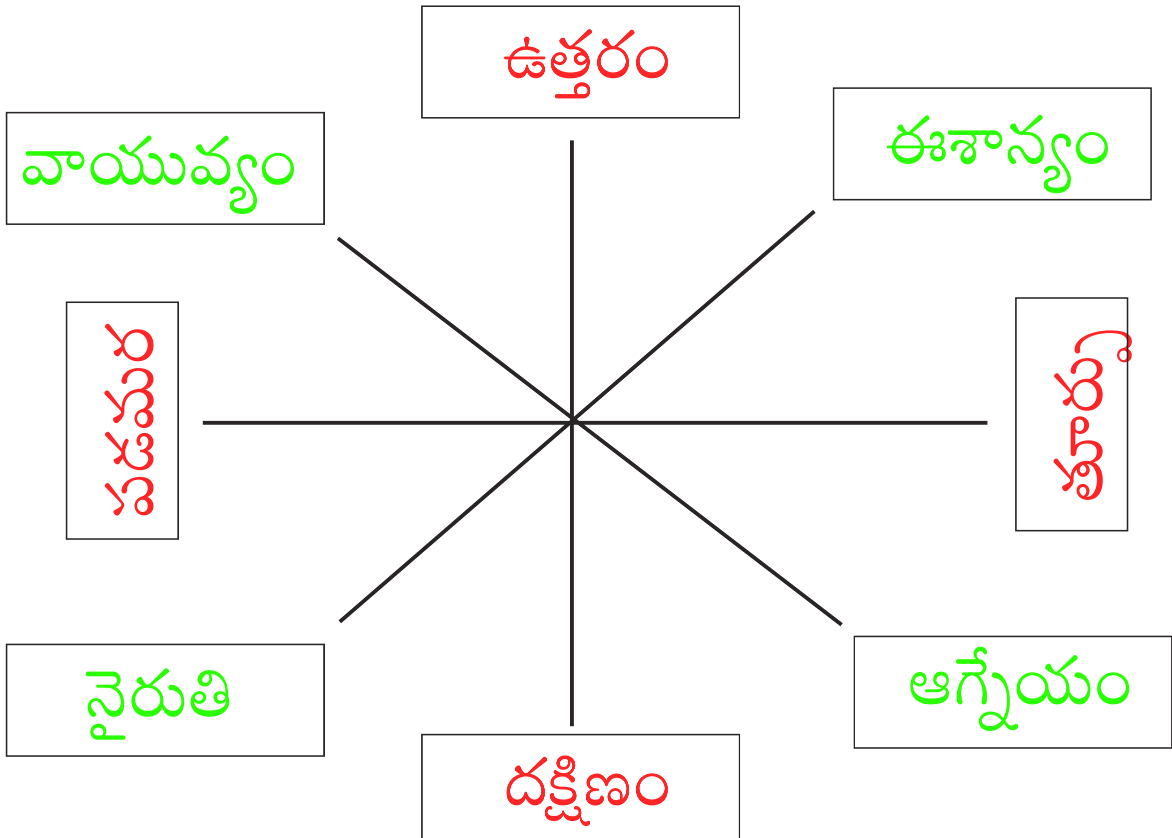
దిక్కులు, దూరాలు-1

పోటీ పరీక్షలు రాస్తున్న అభ్యర్థికి భౌతికంగా దిక్కుల గురించి పరిజ్ఞానం అవసరం. పేపర్‌పై కూడా దిక్కులు గుర్తించగలగాలి.

దిక్కులపై పట్టు సాధించాలంటే పేపర్‌పై దిక్కులు గుర్తించడమే కాకుండా, తూర్పువైపు కొంతదూరం నడిచి కుడివైపు వెళ్లాలి అంటే ఏ దిశలో వెళ్లాలి? అదేవిధంగా ఎడమవైపు వెళ్లాలి అంటే ఏ దిశలో వెళ్లాలి? అనే విషయాలపై పరిజ్ఞానం ఉండాలి. వీటితోపాటు పైథాగరస్ సిద్ధాంతం తెలిసి ఉండాలి.

ముందుగా దిక్కుల గురించి పరిశీలిద్దాం. ఎప్పుడైనా పేపర్‌లో పై భాగాన్ని ఉత్తరం అని, కింది దిశను దక్షిణం అని, కుడివైపును తూర్పుగా, ఎడమవైపును పడమరగా గుర్తించాలి. అదేవిధంగా మూలలు ఈశాన్యం, ఆగ్నేయం, నైరుతి, వాయువ్యాలను వరుసగా గుర్తించాలి.

దిక్కులను కిందివిధంగా గుర్తించాలి



ఈ దిక్కులను ఇంకా సులభంగా గుర్తుంచుకోవాలంటే ఉఈతూఆదనైపవా అనే పదాన్ని నేర్చుకుంటే చాలు. ఈ పదంలోని అక్షరాలను పై నుంచి మొదలుపెట్టి సవ్యదిశలో (Clock wise direction) ఒక్కో అక్షరాన్ని రాస్తూ రావాలి. ఉ అంటే ఉత్తరం, ఈ అంటే ఈశాన్యం... వా అంటే వాయువ్యం. కాబట్టి ఈ పదాన్ని గుర్తుంచుకోండి.

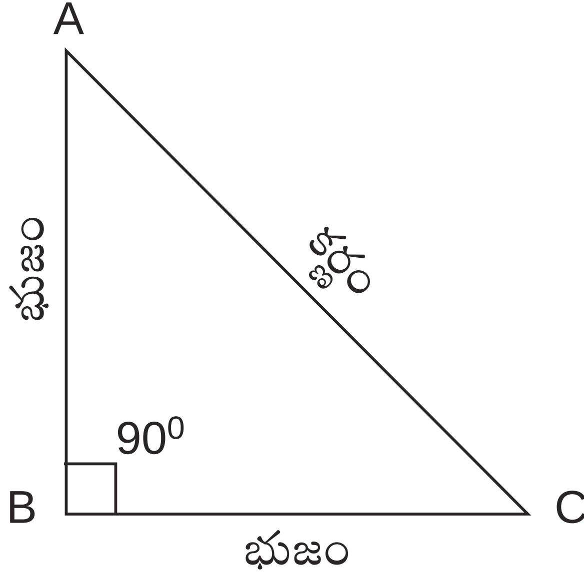
దిక్కులతో పాటు ఏదో ఒక దిశలో కొంతదూరం వెళ్లాక కుడివైపు అంటే ఏ దిశలో వెళ్తున్నాం, ఎడమ వైపు అంటే ఏ దిశలో వెళ్తున్నామో తెలిసి ఉండాలి. వీటిని కింది పట్టిక ద్వారా తెలుసుకుందాం.

మొదట బయలుదేరిన దిశ	కుడివైపు తిరిగితే వెళ్లే దిశ	ఎడమవైపు తిరిగితే వెళ్లే దిశ
ఉత్తరం	తూర్పు	పడమర
తూర్పు	దక్షిణం	ఉత్తరం
దక్షిణం	పడమర	తూర్పు
పడమర	ఉత్తరం	దక్షిణం

పై పట్టిక ద్వారా మొదట ఉత్తరం దిశలో బయలుదేరిన తర్వాత కుడివైపు తిరిగితే తూర్పు దిశలో, ఎడమవైపు తిరిగితే పడమర దిశలో వెళ్ళాలి అని తెలుస్తుంది. ఇదేవిధంగా మిగతా దిక్కుల గురించి పై పట్టిక ద్వారా వివరాలు తెలుసుకోండి.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం

ఒక త్రిభుజంలో ఏదైనా ఒక కోణం 90° ఉన్నట్లయితే దానిని లంబకోణ త్రిభుజం అంటారు. ఈ త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాలు తెలిస్తే మూడోదానిని తెలుసుకోవచ్చు.



సిద్ధాంతం

"ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం వర్గం, మిగతా రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానం."

$$(\text{కర్ణం})^2 = (\text{భుజం})^2 + (\text{భుజం})^2$$

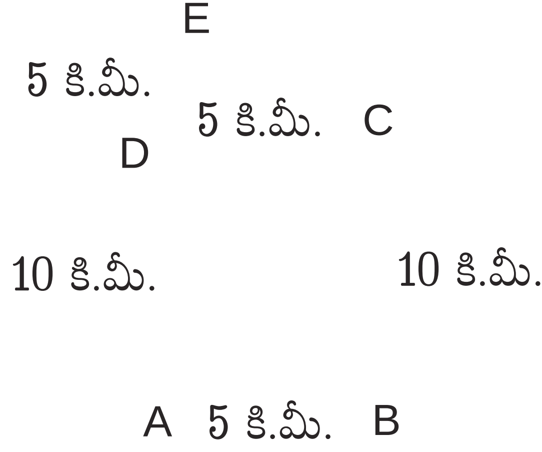
$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

పైన చెప్పిన వివరాలు పూర్తిగా నేర్చుకున్నట్లైతే దిక్కులపై ప్రశ్నలను సులభంగా చేయవచ్చు.

ఈ అంశంపై ప్రశ్న వచ్చినప్పుడు తప్పకుండా బొమ్మ గీసి దాని ఆధారంగానే సమాధానాన్ని గుర్తించాలి.

కొన్ని ఉదాహరణలు

1. ఒక వ్యక్తి తూర్పు దిశలో 5 కి.మీ. ప్రయాణించి, ఎడమవైపు 10 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. మరల ఎడమవైపు తిరిగి 5 కి.మీ. ప్రయాణించి చివరగా కుడివైపు 5 కి.మీ ప్రయాణించాడు. అయితే ఆ వ్యక్తి ప్రారంభస్థలం నుంచి ఏ దిశలో ఎంత దూరంలో ఉన్నాడు?



ఒక వ్యక్తి తూర్పువైపు అంటే A నుంచి B వరకు 5 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. తర్వాత ఎడమవైపు అంటే ఉత్తరంవైపు B నుంచి C వరకు 10 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. మరలా ఎడమవైపు అంటే పడమర వైపు C నుంచి D వరకు 5 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. చివరగా కుడివైపు అంటే ఉత్తరంవైపు 5 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. అంటే అతను ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఉత్తరం దిశలో ఉన్నాడు.

అతను ప్రయాణించిన దూరం అంటే A నుంచి E వరకు కనుక్కోవాలి

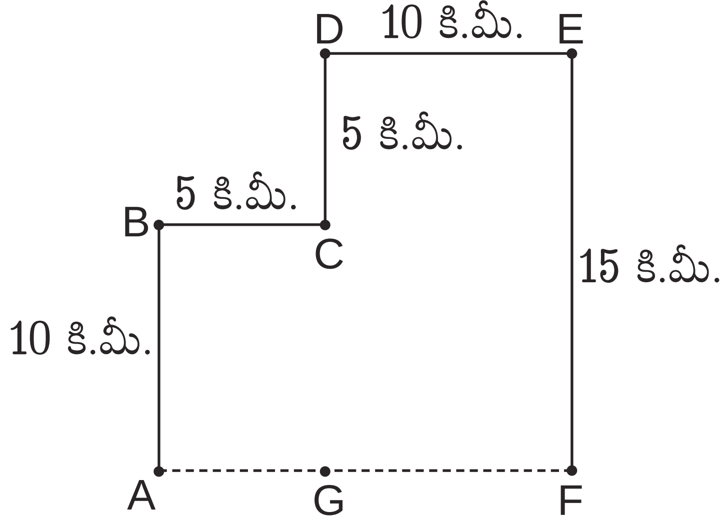
AE = AD + DE

= 10 + 5 [AD = BC = 10 km]

= 15 km

కాబట్టి అతను ప్రారంభస్థలం నుంచి ఉత్తరం దిశలో 15 కి.మీ. దూరంలో ఉన్నాడు.

2. కిరణ్ ఉత్తరం వైపు 10 కి.మీ. నడిచి కుడివైపు 5 కి.మీ. నడిచాడు. మరలా ఎడమవైపు 5 కి.మీ. నడిచి, కుడివైపు మరో 10 కి.మీ. నడిచాడు. చివరగా దక్షిణం వైపు 15 కి.మీ నడిచాడు. అయితే కిరణ్ ప్రారంభస్థలం నుంచి ఏ దిశలో ఎంతదూరంలో ఉన్నాడు?



పై పటాన్ని పరిశీలించినట్లయితే ప్రారంభ స్థలం 'A' అంతిమ స్థలం 'F'ల మధ్య దూరం కనుక్కోవాలి.

AFల మధ్య దూరం = AG + GF

AGకి ఎదురు భుజం BC కాబట్టి AG = BC = 5 కి.మీ.

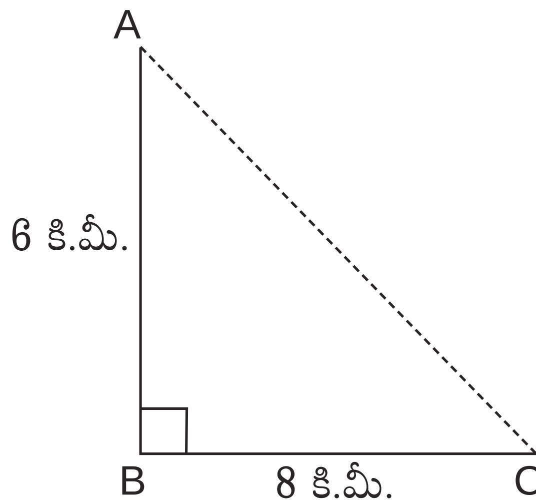
GFకి ఎదురు భుజం DE కాబట్టి GF = DE = 10 కి.మీ.

AF = AG + GF = 5 + 10

= 15 కి.మీ.

కాబట్టి కిరణ్ ప్రారంభ స్థలం నుంచి తూర్పు దిశలో 15 కి.మీ.ల దూరంలో ఉన్నాడు.

3. మనోహర్ దక్షిణం వైపు 6 కి.మీ. ప్రయా ణించి, తూర్పువైపు మరో 8 కి.మీ. ప్రయాణిం చాడు. ఇప్పుడు తను ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఏ దిశలో ఎంత దూరంలో ఉన్నాడు?



A నుంచి B వరకు 6 కి.మీ.

B నుంచి C వరకు 10 కి.మీ. ప్రయాణించాడు.

ఇప్పుడు ACలను కలిపితే లంబకోణ త్రిభుజం వస్తుంది. పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$(\text{కర్ణం})^2 = (\text{భుజం})^2 + (\text{భుజం})^2$

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

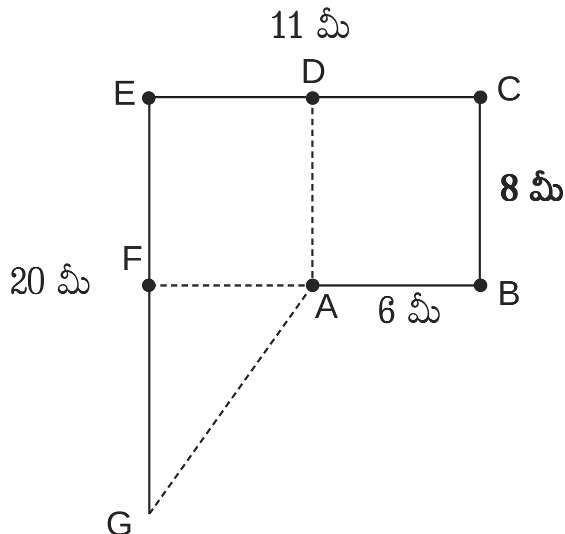
$= 6^2 + 8^2 \qquad = 36 + 64$

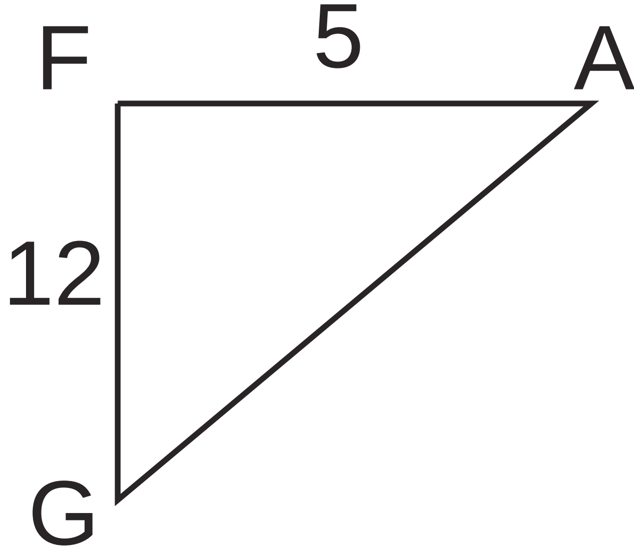
$(AC)^2 = 100$

AC = 10 కి.మీ.

మనోహర్ తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఆగ్నేయ దిశలో 10 కి.మీ. దూరంలో ఉన్నాడు.

4. పద్మ తూర్పువైపు 6మీ. ప్రయాణించి, ఎడమ వైపు మరో 8మీ. ప్రయాణించింది. తర్వాత ఎడమవైపు 11మీ. ప్రయాణించి చివరగా దక్షిణం వైపు 20మీ. ప్రయాణించింది. ఇప్పుడు పద్మ తను బయలుదేరిన స్థలం నుంచి ఏ దిశలో ఎంత దూరంలో ఉంది?





పై పటంలో AG దూరం కనుక్కోవాలి.

AG దూరం కనుక్కోవాలంటే ముందుగా AF, FG భుజాల దూరాలు తెలుసుకోవాలి.

AB దానికెదురుగా ఉన్న భుజం CDలు రెండూ సమానం.

AB = CD = 6 కి.మీ.
DE = CE – CD

= 11 – 6 = 5 కి.మీ.

DE = 5 కి.మీ.

DE దానికెదురుగా ఉన్న భుజం AFలు రెండూ సమానం.

DE = AF = 5 కి.మీ.

BC దానికెదురుగా ఉన్న భుజం EFలు రెండూ సమానం.

BC = EF = 8 మీ.
FG = EG – EF

$= 20 - 8 = 12$ మీ.

FG = 12 మీ.

∴ AFG లంబకోణ త్రిభుజంలో

AF = 5 మీ., FG = 12 మీ. అని తెలుసుకున్నాం. వీటి ఆధారంగా మనకు కావాల్సిన AG దూరం తెలుసుకోవచ్చు.

$(\text{కర్ణం})^2 = (\text{భుజం})^2 + (\text{భుజం})^2$

$(AG)^2 = (AF)^2 + (FG)^2$

$= 5^2 + 12^2$

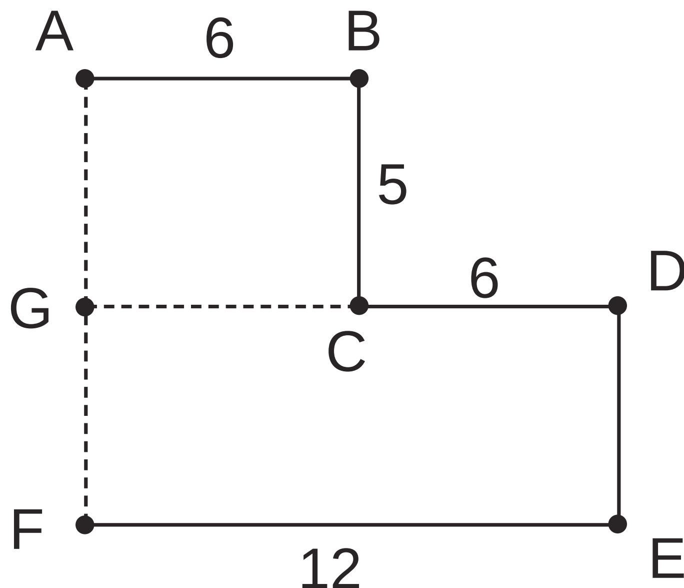
$= 25 + 144 = 169$

$(AG)^2 = 169$

AG = 13 మీ.

∴ పద్మ నైరుతి దిశలో 13 మీ. దూరంలో ఉంది.

5. నాగమణి తూర్పువైపు 6 కి.మీ. ప్రయాణించి, కుడివైపు 5 కి.మీ. ప్రయాణించి మరల ఎడమవైపు 6 కి.మీ. ప్రయాణించింది. తర్వాత కుడివైపు 4 కి.మీ. ప్రయాణించి చివరగా పడమరవైపు 12 కి.మీ. ప్రయాణించింది. అయితే నాగమణి ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఏ దిశలో ఎంత దూరంలో ఉంది?



పై పటంలో BC, దానికెదురుగా ఉన్న భుజం AGలు సమానం.

BC = AG = 5 km

మనకు కావలసిన దూరం

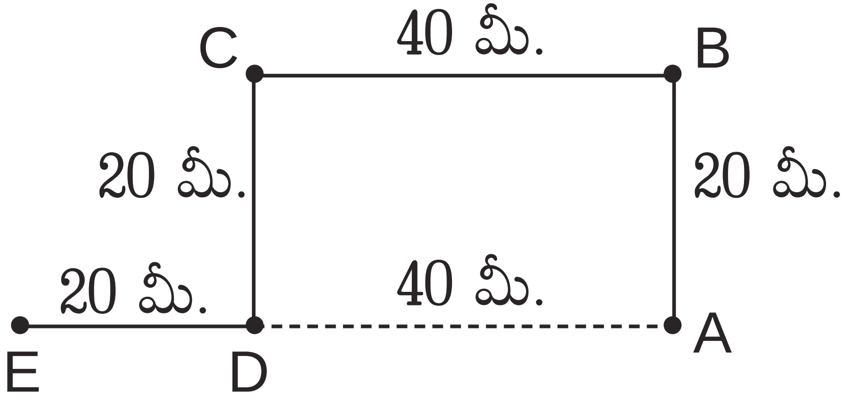
AF = AG + GF

= 5 + 4 = 9

నాగమణి ప్రారంభ స్థలం నుంచి దక్షిణ దిశలో 9 కి.మీ. దూరంలో ఉంది.

దిక్కులు, దూరాలు-2

1. గౌతమ్ ఉత్తరం వైపు 20 మీ. నడిచి, ఎడమవైపు తిరిగి 40 మీ. నడిచాడు. మరల ఎడమవైపు తిరిగి 20 మీ. నడిచాడు. చివరగా కుడివైపు తిరిగి 20 మీ. నడిచినట్లయితే ఇప్పుడతను ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఎంత దూరంలో ఉన్నాడు?



పై పటం ద్వారా

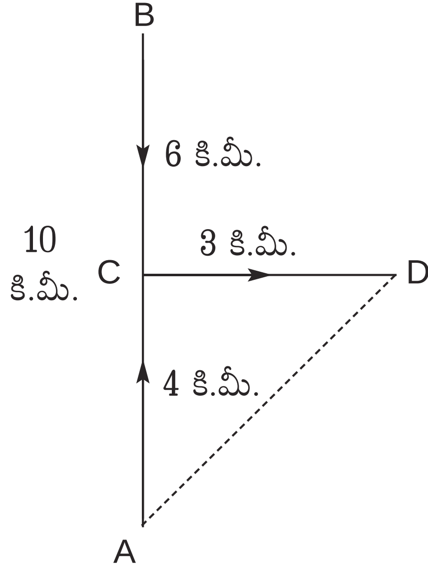
మనం కనుక్కోవలసిన దూరం AE = AD + DE

దీర్ఘ చతురస్రంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమానం. కాబట్టి BC = AD = 40 మీ.

కాబట్టి AE = 40 మీ + 20 మీ. = 60 మీ.

గౌతమ్ ప్రారంభ స్థలం నుంచి 60 మీ. దూరంలో ఉన్నాడు.

2. రాజేష్ ఉత్తరం వైపు 10 కి.మీ. నడిచి, అక్కడి నుంచి దక్షిణం వైపు 6 కి.మీ. నడిచాడు. అక్కడి నుంచి తూర్పువైపు 3 కి.మీ. నడిచాడు. ఇప్పుడతను ప్రారంభస్థలం నుంచి ఏ దిశలో ఎంతదూరంలో ఉన్నాడు?



పై పటం ద్వారా

రాజేష్ A నుంచి Bకి, B నుంచి Cకి, C నుంచి Dకి బయలుదేరాడు.

ఇప్పుడు A నుంచి Dకు దిశ, దూరం కనుక్కోవాలి. A నుంచి D ఈశాన్య దిశలో ఉంది.

$AC = AB - BC = 10 - 6 = 4$ km

$CD = 3$ km

త్రిభుజం ACD అనేది లంబకోణ త్రిభుజం. ఇందులో రెండు భుజాల కొలతలు తెలిస్తే కర్ణం కొలత తెలుసుకోవచ్చు.

కర్ణం^{2} = భుజం^{2} + భుజం^{2}

$(AD)^2 = (AC)^2 + (CD)^2$

$= 4^2 + 3^2$

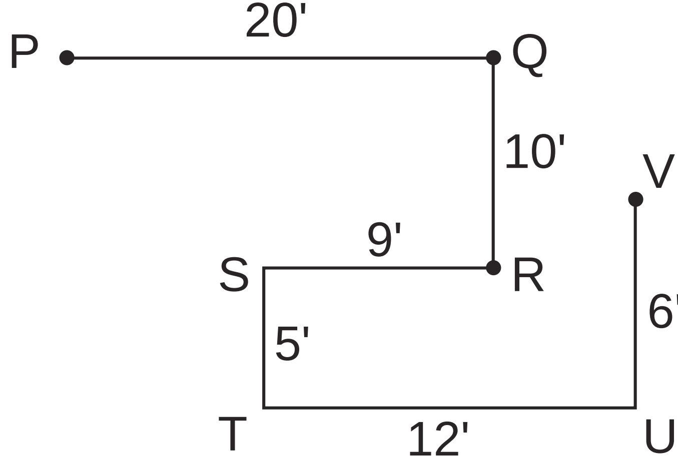
$= 16 + 9 = 25$

$(AD)^2 = 25$

$AD = 5$ km

∴ రాజేష్ ప్రారంభస్థలం నుంచి ఈశాన్య దిశలో 5 కి.మీ.ల దూరంలో ఉన్నాడు.

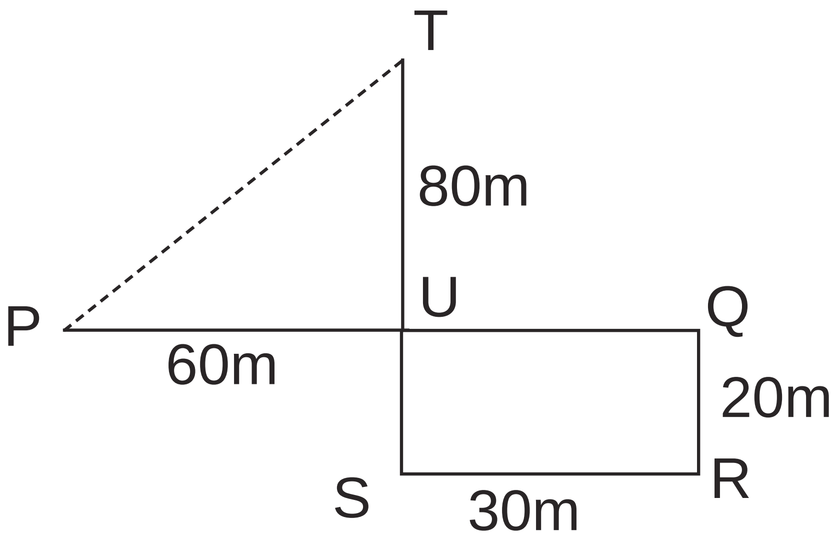
3. ఒక ఎలుక తూర్పువైపు 20' వెళ్ళి, కుడివైపు తిరిగి 10' నడిచింది. మరల కుడివైపు తిరిగి 9' నడిచి ఎడమవైపు తిరిగి 5' నడిచింది. మరల ఎడమవైపు 12' నడిచి చివరగా 6' నడిచింది. చివరిసారిగా ఎలుక ఏ దిశలో ప్రయాణిం చింది?



పై పటం ఆధారంగా ఎలుక P నుంచి V వరకు ప్రయాణించిన దిశలు తెలుస్తున్నాయి.

చివరిసారిగా ఎలుక ఉత్తర దిశలో ప్రయాణించింది.

4. ఒక వ్యక్తి తూర్పువైపు 90 మీ. నడిచి, కుడివైపు 20 మీ. నడిచాడు. మరలా కుడివైపు 30 మీ. నడిచి, చివరగా ఉత్తరం వైపు 100 మీ. నడిచాడు. అయితే ప్రారంభస్థలం నుంచి ఇప్పుడతను ఎంతదూరంలో ఉన్నాడు?



ఆ వ్యక్తి P నుంచి T వరకు ప్రయాణించిన వివిధ దిశలను కింది పటంలో పరిశీలించవచ్చు.

$PQ = 90m$

$SR = UQ = 30\ m$

$PU = PQ - UQ = 90 - 30 = 60\ m$

$ST = 100\ m$

$QR = US = 20\ m$

$TU = ST - US = 100 - 20 = 80\ m$

$PU = 60\ m\ ;\ TU = 80\ m$

PTU అనే లంబకోణ త్రిభుజంలో రెండు భుజాల కొలతలు తెలిస్తే కర్ణం కొలత తెలుసుకోవచ్చు.

కర్ణం^{2} = భుజం^{2} + భుజం^{2}

$(PT)^2 = (PU)^2 + (TU)^2$

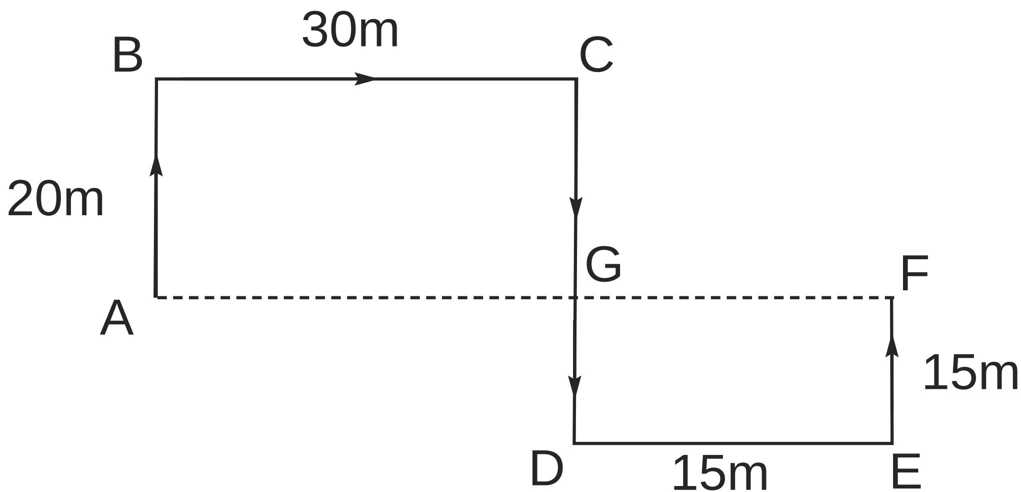
$= 60^2 + 80^2$

$= 3600 + 6400$

$(PT)^2 = 10000,\ \ PT = 100\ m$

∴ అతను ప్రారంభస్థలం నుంచి 100 మీ. దూరంలో ఉన్నాడు.

5. రమ్య ఉత్తరం వైపు 20 మీ. నడిచి, కుడివైపు తిరిగి మరో 30 మీ. నడిచింది. మరలా కుడివైపు తిరిగి 35 మీ. నడిచి, ఎడమవైపు తిరిగి మరో 15 మీ. నడిచింది. చివరగా ఎడమవైపు తిరిగి 15 మీ. నడిచింది. అయితే ఆమె ప్రారంభస్థలం నుంచి ఏ దిశలో ఎంతదూరంలో ఉంది?



పై పటంలో A నుంచి F వరకు రమ్య ప్రయాణించిన దూరాన్ని దిశలను గమనించ వచ్చు.

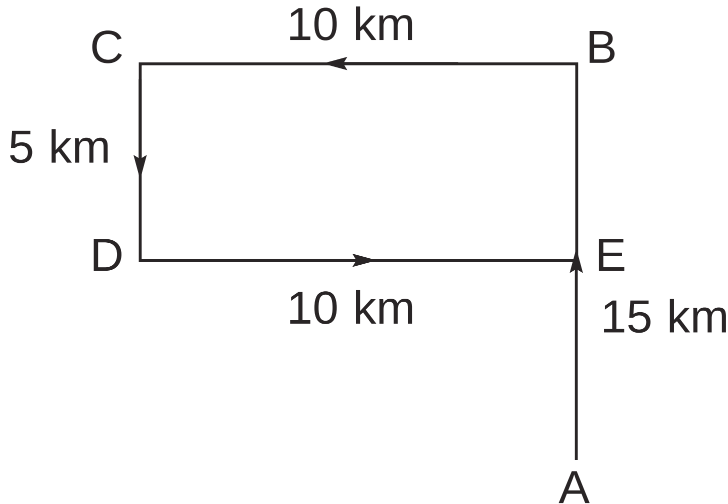
CD = AB + EF అయింది. కాబట్టి A రేఖపై F బిందువు ఉంటుంది.

మనకు కావాల్సిన దూరం

$$AF = AG + GF$$
$$BC = AG = 30 \text{ cm}$$
$$DE = GF = 15 \text{ m}$$
$$\therefore \quad AG = 30 \text{ m}, GF = 15 \text{ m}.$$
$$AF = 30 + 15 = 45 \text{ m}.$$

∴ రమ్య తన ప్రారంభ స్థలానికి తూర్పు దిశలో 45 మీ. దూరంలో ఉంది.

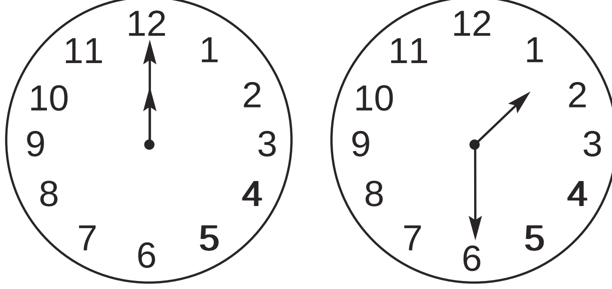
6. హరి తన ఇంటి నుంచి 15 కి.మీ. ఉత్తరం వైపు ప్రయాణించి, పడమర వైపు 10 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. మరలా దక్షిణం వైపు తిరిగి 5 కి.మీ. ప్రయాణించి చివరగా తూర్పువైపు 10 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. అయితే అతను తన ఇంటి నుంచి ఏ దిశలో ఉన్నాడు?

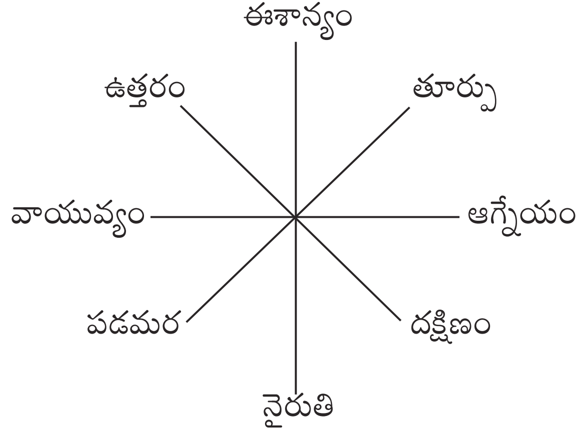


హరి A నుంచి E వరకు ప్రయాణించిన దూరం, దిశలను పై పటంలో గమనించవచ్చు.

పై పటం ఆధారంగా అతను తన ఇంటి నుంచి ఉత్తరం దిశలో ఉన్నాడని తెలుస్తుంది.

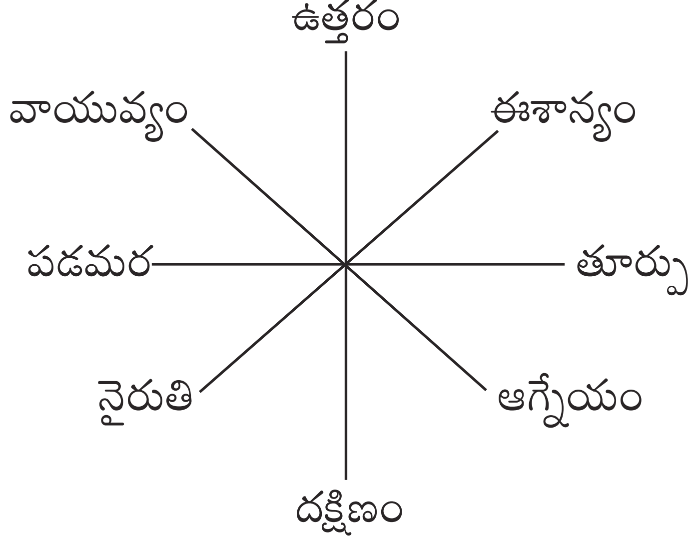
7. ఒక గడియారంలో మధ్యాహ్నం 12 గంటలకు నిమిషాల ముల్లు ఈశాన్య మూలలో ఉంటే 1:30PMకు గంటల ముల్లు ఏ దిశను సూచిస్తుంది.



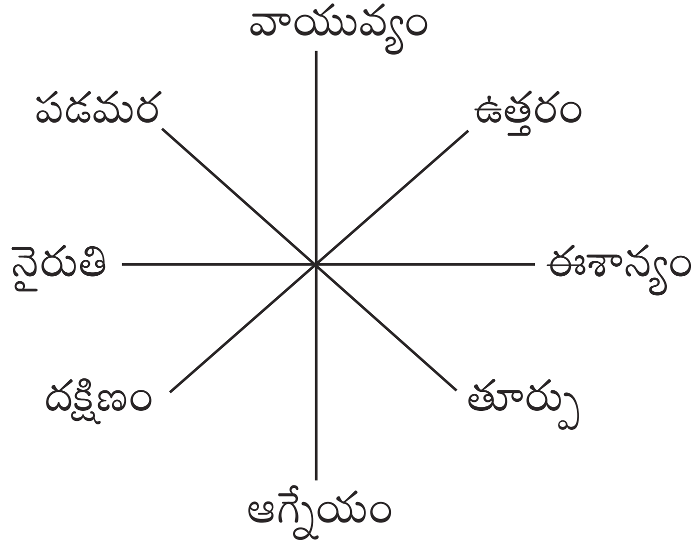


పై రెండు పటాల ఆధారంగా మధ్యాహ్నం గం. 12:00కు నిమిషాల ముల్లు ఈశాన్య దిశలో ఉన్నట్లయితే 1:30PMకు గంటల ముల్లు తూర్పుదిశను సూచిస్తుందని తెలుస్తుంది.

8. ఒకవేళ ఆగ్నేయంను తూర్పుగా, వాయువ్యం ను పడమరగా, నైరుతిని దక్షిణంగా సూచిస్తే ఉత్తరంను దేనితో సూచిస్తారు?



i) సరైన దిక్కులు



ii) ప్రశ్నలో ఇచ్చిన డేటా ఆధారంగా దిక్కులు

ఔ

పై పటం ఆధారంగా ఉత్తరంను వాయువ్య దిశతో సూచిస్తాం.

దిక్కులు- దూరాలు-3

భౌతికంగా దిక్కులు తెలుసుకోవడంతో పాటు ఒక పేపర్‌పై దిక్కులను గుర్తించగలి గితే ఈ ప్రశ్నలకు సమాధానాలను గుర్తించడం చాలా సులువు. వీటిని సాధించాలంటే.. దిక్కులను గురించి గురించి సమగ్రంగా

మొదటి విషయం

ఎప్పుడైనా ఒక కాగితంపై పై దిశను ఉత్తరంగానూ, కింది దిశను దక్షిణంగాను, కుడివైపును తూర్పుగాను, ఎడమవైపును పడమరగాను గుర్తించాలి. అదేవిధంగా

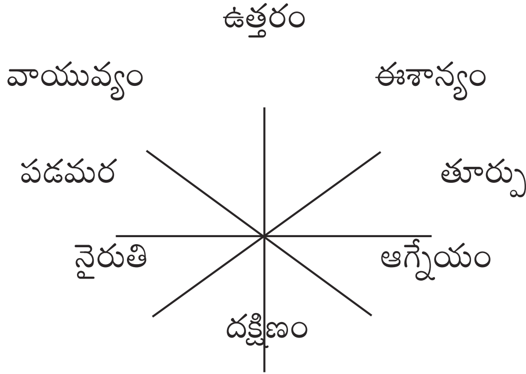
ఉత్తరం, తూర్పుల మధ్య – ఈశాన్యం

తూర్పు, దక్షిణాల మధ్య – ఆగ్నేయం

దక్షిణం, పడమరల మధ్య – నైరుతి

పడమర, ఉత్తరాల మధ్య–వాయువ్య దిశలుంటాయి.

వీటిని కింది పటం ద్వారా సూచించవచ్చు.



ఈ దిక్కులను 'ఉఈతూఆదనైపవా' అనే ఎని మిది అక్షరాల కొండ గుర్తు ఆధారంగా సవ్యదిశ (Clock wise direction)లో సులభంగా దిక్కుల ను గుర్తుంచుకోవచ్చు.

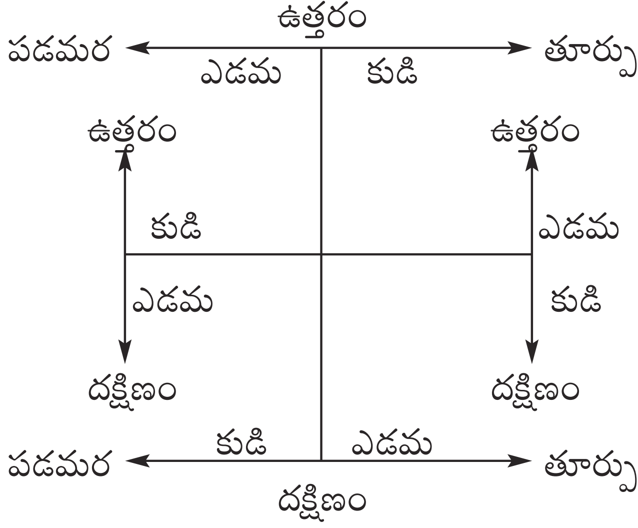
రెండో విషయం

ఒక వ్యక్తి కొంత దూరం ఒక దిశలో వెళ్లి కుడి వైపు లేదా ఎడమ వైపు మళ్లాడు అంటే ఏ దిశలో వెళ్లాడు అనే విషయాలు తెలుసుకోవాలి.

ఒక వ్యక్తి తూర్పువైపు కొంతదూరం వెళ్లి కుడి వైపు అంటే దక్షిణం వైపు, ఎడమవైపు అంటే ఉత్తరం వైపు వెళ్లినట్లు గుర్తుంచుకోవాలి. అదేవిధంగా పడ మర వైపు కొంత దూరం వెళ్లి కుడివైపు అంటే ఉత్తరం వైపు, ఎడమవైపు అంటే దక్షిణం వైపు మళ్ళినట్లు గుర్తు.

ఉత్తరం వైపు కొంతదూరం వెళ్ళి కుడివైపు అంటే తూర్పువైపు, ఎడమవైపు అంటే పడమర వైపు మళ్ళినట్లు గుర్తు. అదేవిధంగా దక్షిణం వైపు కొంత దూరం వెళ్ళి, కుడివైపు అంటే పడమర వైపు, ఎడమ

వైపు అంటే తూర్పు వైపు వెళ్తున్నాడని అర్థం.



పై చిత్రం ఆధారంగా వీటిని గుర్తించవచ్చు.

మూడో విషయం

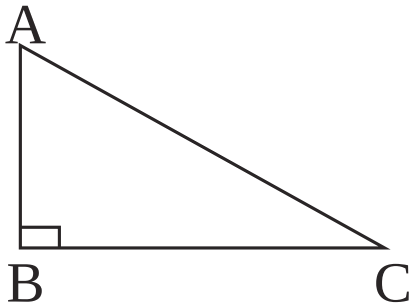
దిక్కులపై ప్రశ్న ఇచ్చినప్పుడు ఒక వ్యక్తి పలు దిశ లలో కొంతదూరం ప్రయాణించాక, ఇప్పుడు అత ను ప్రారంభస్థలం నుంచి ఏ దిశలో, ఎంత దూరం లో ఉన్నాడు అనే ప్రశ్నలు అడగవచ్చు. ఇలాంటి ప్రశ్న వచ్చినప్పుడు కొన్ని సందర్భాల్లో పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ఉపయోగించాల్సి ఉంటుంది.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం

ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తం దాని కర్ణపు వర్గానికి సమానం.

ΔABCలో

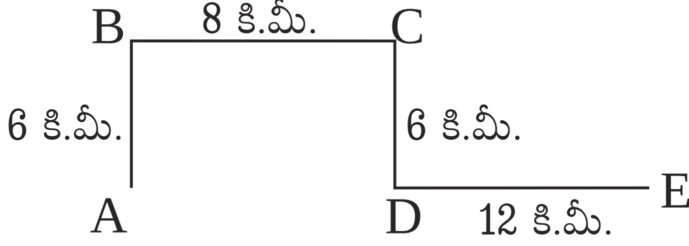
$$\text{కర్ణం}^2 = \text{భుజం}^2 + \text{భుజం}^2$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$



పైన పేర్కొన్న మూడు ముఖ్యమైన అంశాలపై మీరు అవగాహన సాధిస్తే దిక్కులపై వచ్చిన ప్రశ్నలను సులభంగా సాధించగలరు. దిక్కులపై ప్రశ్న వస్తే ఇచ్చిన డేటా ఆధారంగా ముందుగా డయాగ్రం గీసుకోవాలి. డయాగ్రం సరిగ్గా వేస్తే, దాదాపుగా ప్రశ్నను పూర్తి చేసినట్టే.

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం

1. ఒక వ్యక్తి ఉత్తరం వైపు 6 కి.మీ. ప్రయాణించి, కుడివైపు తిరిగి 8 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. మరలా కుడివైపు తిరిగి 6 కి.మీ. ప్రయాణించి, చివరగా ఎడమవైపు 12 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. అయితే ఇప్పుడు అతను ప్రారంభస్థలం నుంచి ఏ దిశలో ఎంతదూరంలో ఉన్నాడు?



వ్యక్తి A నుంచి B, C, D మీదుగా E చేరుకున్నాడు.

AE దూరం = AD దూరం + DE దూరం

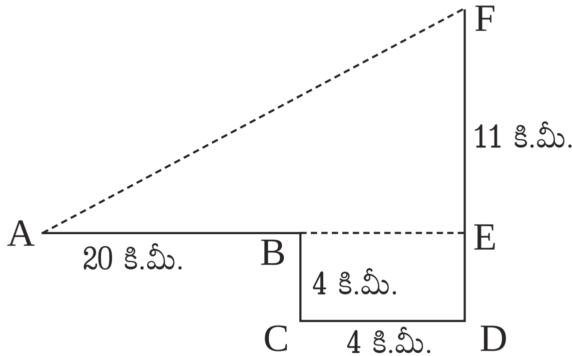
= BC దూరం + DE దూరం

(AD దూరం = BC దూరం)

= 8 + 12 = 20 కి.మీ.

$\therefore$ అతను తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి తూర్పు దిశలో 20 కి.మీ. దూరంలో ఉన్నాడు.

2. ఒక వ్యక్తి తూర్పువైపు 20 కి.మీ. ప్రయాణించి, కుడివైపు 4 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. మరల ఎడమవైపు 4 కి.మీ. ప్రయాణించి, చివరగా ఉత్తరం దిశలో 11 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. అయితే ఇప్పుడు అతను తన ప్రారంభస్థలం నుంచి ఏ దిశలో ఎంత దూరంలో ఉన్నాడు?



అతను ప్రయాణించిన దూరాన్ని పై పటం ద్వారా చూపించవచ్చు. A నుంచి బయలుదేరి B, C, D, Eల మీదుగా Fకు చేరుకున్నాడు.

మనం AF దూరం, దిశ కనుక్కోవాలి. పటం చూడగానే దిశ ఈశాన్యం అని చెప్పవచ్చు.

AFను, BEలను కలపడం వల్ల AEF లంబకోణ త్రిభుజం ఏర్పడింది.

$AF^2 = AE^2 + EF^2$ ---------(1)

AE = AB + BE = 20 + 4 = 24 కి.మీ.

(CD = BE)

EF = DF – DE = 11 – 4 = 7 కి.మీ.

AE, EFలను సమీకరణం (1)లో రాయగా,

$AF^2 = 24^2 + 7^2$

$AF^2 = 576 + 49$

$AF^2 = 625$

AF = $\sqrt{625}$ = 25 కి.మీ.

∴ అతను తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఈశాన్య దిశలో 25 కి.మీ. దూరంలో ఉన్నాడు.

చిట్కా

ఏదైనా ఒక సంఖ్యను 25తో గుణించాల్సి వచ్చినప్ప డు.. ఆ సంఖ్యను 4తో భాగించడం ద్వారా ఫలితం రాబట్టవచ్చు(25తో గుణించడం కన్నా 4తో భాగిం చడం చాలా సులువు) ఇలా భాగించడం వల్ల కొంత భాగఫలం వస్తుంది. శేషం 0 గానీ, 1 గానీ, 2 గానీ, 3 గానీ వస్తుంది.

శేషం

0 వస్తే భాగఫలం చివర రెండు సున్నాలు రాయండి

1 వస్తే భాగఫలం చివర 25 రాయండి

2 వస్తే భాగఫలం చివర 50 రాయండి

3 వస్తే భాగఫలం చివర 75 రాయండి

అదే వాటి లబ్దం అవుతుంది.

దిక్కులు-దూరాలు-4

దిక్కులుపై అడిగే ప్రశ్నలు వ్యక్తిలోని తార్కిక ఆలోచనా శక్తిని, వేగంగా నిర్ణయాలు తీసుకోగల శక్తిని పరీక్షించేవిగా ఉంటాయి.

దిక్కులపై ఏదైనా ఒక ప్రశ్న ఇచ్చినప్పుడు ఆ ప్రశ్నలో గల ప్రమాణాలను (Units) కూడా జాగ్రత్తగా గమనించాలి. ఒక ప్రశ్నకు సమాధానం కనుక్కుంటే 5 వచ్చిందనుకున్నాం. ఆ ప్రశ్నలో దూరం ప్రమా ణాలు అన్నీ కి.మీ.లలో ఉంటే, సమాధానం 5 కి.మీ. అవుతుంది. కానీ ప్రశ్న కింద ఇచ్చిన ఆప్షన్ లు కింది విధంగా ఉన్నాయి అనుకుందాం.

ఎ) 5 మీ బి) 50 మీ

సి) 500 మీ డి) 5000 మీ

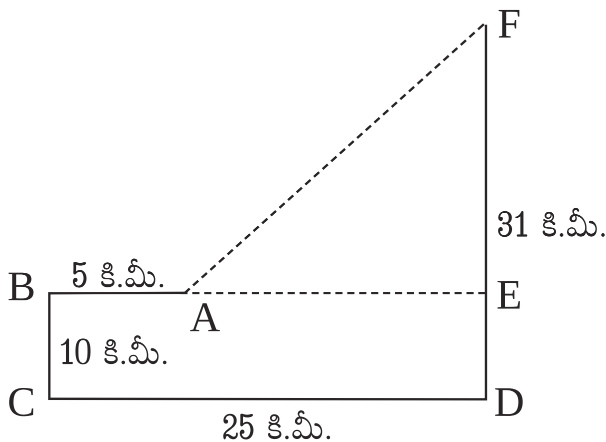
సమాధానం ‘5’ వచ్చింది. కాబట్టి దాదాపు చాలామంది అభ్యర్థులు సమాధానం ‘ఎ’ ను గుర్తి స్తారు. ప్రశ్నలో యూనిట్స్ కి.మీ.లలో ఇచ్చారు. కింద ఆప్షన్‌లలో సమాధానం మీ.లలో ఇచ్చారు. 5 కి.మీ.లను మీ.లలోకి మార్చుకుంటే 5000మీ. అవుతుంది కాబట్టి సమాధానం ‘డి’ అవుతుంది.

మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

1. ఏకాంత్ పడమర వైపు 5 కి.మీ. ప్రయాణించి, ఎడమ వైపు తిరిగి 10 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. మరలా ఎడమ వైపు తిరిగి మరో 25 కి.మీ. ప్రయాణించి, చివరగా ఉత్తరం వైపు 31 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. అయితే అతను ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఎంత దూరంలో ఉన్నాడు?

ఎ) 29 కి.మీ. బి) 290 మీ.

సి) 2900 మీ. డి) 29000 మీ.



ఏకాంత్ A నుంచి B, C, D, Eల మీదుగా F చేరుకున్నాడు. A నుంచి F దిశ, దూరం

కనుక్కోవాలి.

పటం ఆధారంగా అతడు ఈ శాన్యదిశలో ఉన్నట్లు తెలుస్తుంది.

పటంలో A నుంచి E వర కు, F వరకు రేఖలను కలిపితే AEF లంబకోణ త్రిభుజం ఏర్ప డుతుంది. ఇందులో

కర్ణం^{2} = భుజం^{2} + భుజం^{2}

$AF^2 = AE^2 + EF^2$

AE దూరం = CD దూరం – AB దూరం

= 25 – 5 = 20 కి.మీ.

EF దూరం = DF దూరం – ED దూరం

= 31 – 10 = 21 కి.మీ.

∴ AE దూరం = 20 కి.మీ.

EF దూరం = 21 కి.మీ.

$AF^2 = 20^2 + 21^2$

$AF^2 = 400 + 441$

$AF^2 = 841$

$AF = \sqrt{841} = 29$

ప్రశ్నలో ప్రమాణాలు కి.మీ.లలో ఉన్నాయి. కాబట్టి అతను ప్రారంభస్థలం నుంచి 29 కి.మీ.లలో ఉన్నాడని చెప్పవచ్చు. కానీ ఆప్షన్‌లలో సమాధా నాల ప్రమాణాలు మీ.లలో ఉన్నాయి.

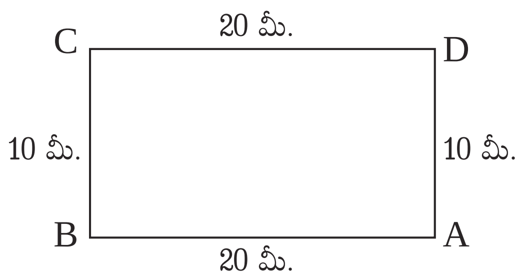
29 కి.మీ. = 29000 మీ.

∴ సమాధానం 'డి' అవుతుంది.

2. ఒక వ్యక్తి సూర్యోదయాన్నే ఒక దిశలో 20 మీ. నడిచాడు. అప్పుడు తన నీడ తన ముందువైపు ఉంది. తర్వాత 10 మీ. కుడివైపు నడిచి, మరలా కుడివైపు మరో 20 కి.మీ. నడిచాడు. చివరగా కుడివైపు మరో 10 కి.మీ. నడిచాడు. ఇప్పుడు అతను తన ప్రారంభస్థలం నుంచి ఏ దిశలో ఎంత దూరంలో ఉన్నాడు?

ఎ) తూర్పు 10 కి.మీ. బి) పడమర 10 మీ.

సి) తొలి స్థానం డి) చెప్పలేం



అతడు సూర్యోదయాన్నే బయలుదేరాడు. అం టే అప్పుడు సూర్యుడు తూర్పు దిశలో ఉంటాడు.

ఒక దిశలో 20 మీ. దూరం నడుస్తున్నపుడు నీడ అతని ముందువైపు ఉంది. అంటే అతడు పడమర దిశలో ప్రయాణాన్ని ప్రారంభించాడు.

అతడు తన ప్రయాణాన్ని 'A' నుంచి ప్రారంభించి B, C, Dల మీదుగా వెళ్ళి చివరికి తన తొలి స్థానం 'A'ను చేరుకున్నాడు.

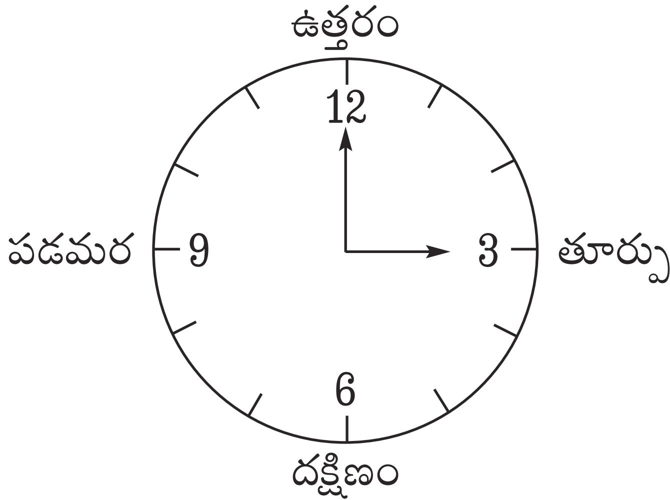
అంటే అతడు తన తొలి స్థానంలోనే ఉన్నాడని చెప్పవచ్చు. ∴ సమాధానం 'సి' అవుతుంది.

3. సమయం సరిగ్గా 3:00 గంటలు అయినప్పుడు గంటల ముల్లు తూర్పు దిశను చూపిస్తే, నిమిషాల ముల్లు ఏ దిశను సూచిస్తుంది?

ఎ) పడమరబి) దక్షిణం

సి) ఉత్తరం డి) తూర్పు

సమాధానం (సి)



పై పటం ఆధారంగా గంటల ముల్లు తూర్పు దిశను సూచిస్తే నిమిషాల ముల్లు 12 మీద ఉంటుంది. అంటే ఉత్తరం దిశను సూచిస్తుంది.

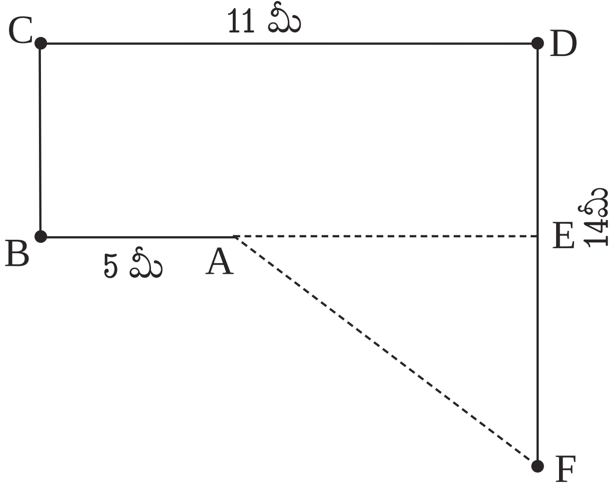
4. సునీత పడమర దిశలో 5 మీ. ప్రయాణించి కుడివైపు మరో 6 మీ. ప్రయాణించింది. తర్వాత కుడివైపు 11 మీ. ప్రయాణించి, చివరగా దక్షిణం వైపు 14 మీ. ప్రయాణించింది. అయితే ఆమె తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఏ దిశలో ఎంత దూరంలో ఉంది?

ఎ) ఆగ్నేయం 10 మీ.

బి) ఈశాన్యం 10 మీ.

సి) వాయువ్యం 10 మీ.

డి) నైరుతి 10 మీ.



సునీత A నుంచి తన ప్రయాణాన్ని ప్రారంభించి B, C, D, Eల మీదుగా F చేరుకుంది.

A నుంచి Fకు దిశ పటం ఆధారంగా ఆగ్నేయం అని తెలుస్తుంది.

A నుంచి E, Fలను కలిపితే AEF ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ఏర్పడుతుంది.

లంబకోణ త్రిభుజంలో...

కర్ణం^{2} = భుజం^{2} + భుజం^{2}

$AF^2 = AE^2 + EF^2$

AE = CD – BA = 11 – 5 = 6 కి.మీ.

EF = DF – DE = 14 – 6 = 8 కి.మీ.

(DE = BC = 6 మీ.)

$\therefore AF^2 = 6^2 + 8^2$

$AF^2 = 36 + 64$

$AF^2 = 100$

AF = 10 మీ.

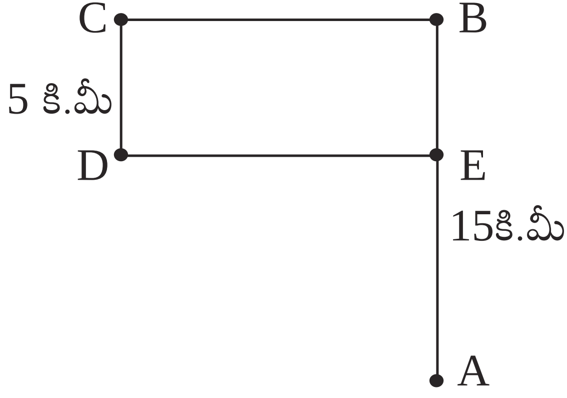
∴ సమాధానం 'ఎ'

ఈ అంశంపై గతంలో వచ్చిన ప్రశ్న

1. లోకేష్ తన ఇంటి నుంచి 15 కి.మీ. ఉత్తరం దిశలో ప్రయాణించి, పడమర వైపు తిరిగి 10 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. మరలా దక్షిణం వైపు 5 కి.మీ. ప్రయాణించి చివరగా తూర్పువైపు 10 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. అయితే ఇప్పుడు అతను తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఏ దిశలో, ఎంత దూరంలో ఉన్నాడు?

ఎ) తూర్పు 10 కి.మీ. బి) పడమర 10 కి.మీ.

సి) ఉత్తరం 10 కి.మీ.   డి) దక్షిణం 10 కి.మీ.



పై పటం ఆధారంగా లోకేష్ 'A' నుంచి బయలుదేరి B, C, Dల మీదుగా E చేరుకున్నాడు. ప్రస్తుతం అతను ఉత్తరం దిశలో ఉన్నట్లు తెలుస్తుంది.

AE దూరం = AB – BE

AE దూరం = 15 – 5

(BE = CD = 5 కి.మీ.)

AE దూరం = 10

∴ లోకేష్ తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఉత్తరం దిశలో 10 కి.మీ.ల దూరంలో ఉన్నాడు.

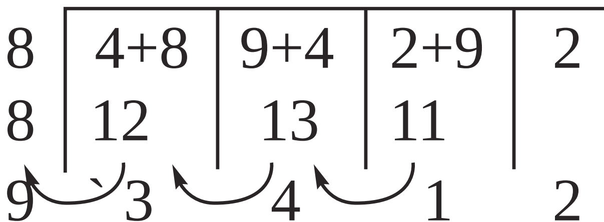
∴ సమాధానం 'సి' అవుతుంది.

నేటి చిట్కా

ఏదైనా ఒక సంఖ్యను 11తో గుణించాలంటే, ముందుగా ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెను యథావిధిగా రాయాలి. ఆ తర్వాత ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెతో మొదలుపెట్టి చివరి అంకె వరకు ప్రతిసారి దానికన్నా ముందున్న అంకెను కూడి ఫలితంలో రాయాలి.

ఉదాహరణ 1: 8492×11

∴ 8492 = 93412



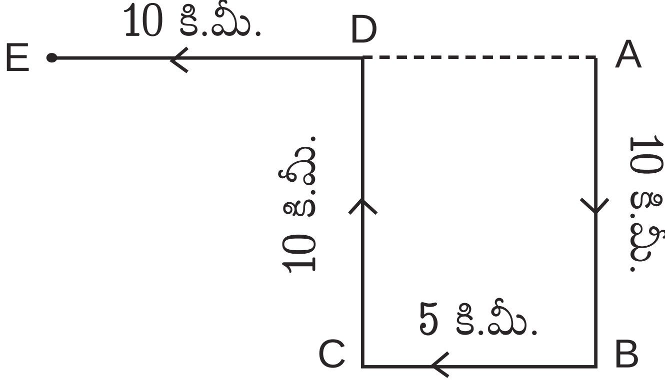
దిక్కులు-దూరాలు-5

దిక్కులు – గత ప్రశ్నలు

1. కిరణ్ దక్షిణం వైపు 10 కి.మీ. ప్రయాణించి, కుడివైపు 5 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. మళ్లీ కుడివైపు 10 కి.మీ. ప్రయాణించి, చివరగా ఎడమవైపు 10 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. అయితే ఇప్పుడు కిరణ్ తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఏ దిశలో ఎంత దూరంలో ఉన్నాడు?

ఎ) పడమర 15 మీ   బి) ఉత్తరం 150 మీ

సి) ఉత్తరం 1500 మీ   డి) పడమర 15000 మీ



పై పటం ద్వారా కిరణ్ ప్రయాణించిన దిశలను, దూరాన్ని సూచించాం. దాని ద్వారా కిరణ్ తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి పడమర దిశలో ఉన్నట్లు తెలుస్తుంది.

అతడు ప్రయాణించిన దూరం

$$AE = AD + DE$$

= 5 + 10 ($\because AD = BC = 5$ కి.మీ.)

= 15 కి.మీ.

$\therefore$ కిరణ్ తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి పడమర దిశలో 15 కి.మీ.ల దూరంలో ఉన్నాడు. కానీ ఇచ్చిన నాలుగు ఆప్షన్లలో ప్రమాణాలు కి.మీ.లలో కాకుండా మీటర్లలో ఉన్నాయి. కాబట్టి 15 కి.మీ.లను

మీటర్లలోకి మారిస్తే 15000 మీ. సమాధానం అవుతుంది.

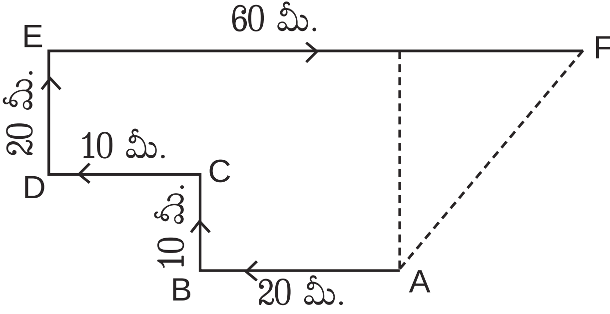
సమాధానం: (డి) పడమర 15000 మీ. సమాధానం.

2. నేను దక్షిణ ముఖంగా ఉన్నాను. కుడివైపు తిరిగి 20 మీ. నడిచి, మళ్లీ కుడివైపు తిరిగి 10 మీ. నడిచాను. నేను మరోసారి ఎడమవైపు తిరిగి 10 మీ. నడిచి, మళ్లీ కుడివైపు తిరిగి మరో 20 మీ. నడిచాను. చివరగా కుడివైపు తిరిగి 60 మీ. నడిచాను. అయితే ప్రారంభ స్థలం నుంచి నేను ఏ దిశలో ఉన్నాను?

ఎ) ఉత్తరం బి) వాయువ్యం

సి) తూర్పు డి) ఈశాన్యం

పై ప్రశ్నను చిత్రరూపంలో సూచిస్తే...



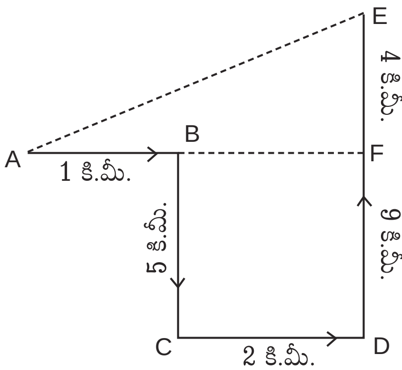
పై పటం ఆధారంగా అంతిమ స్థలం ప్రారంభ స్థలానికి ఈశాన్య దిశలో ఉందని చెప్పవచ్చు.

సమాధానం: (డి) ఈశాన్యం

3. సునీత తూర్పు వైపు 1 కి.మీ. ప్రయాణించి, దక్షిణం వైపు తిరిగి 5 కి.మీ. ప్రయాణించింది. మళ్లీ తూర్పు వైపు 2 కి.మీ. ప్రయాణించి చివరగా ఉత్తరం దిశలో 9 కి.మీ. ప్రయాణించింది. అయితే ఇప్పుడు ఆమె తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఎంత దూరంలో ఉంది?

ఎ) 3 కి.మీ. బి) 4 కి.మీ.

సి) 5 కి.మీ. డి) 7 కి.మీ.



పై పటంలో AE దూరం కనుక్కోవాలి. AB రేఖను F వరకు పొడిగిస్తే AFE అనే లంబకోణ త్రిభుజం ఏర్పడుతుంది.

లంబకోణ త్రిభుజంలో...

$AE^2 = AF^2 + FE^2$

పై పటంలో $AF = AB + BF$

$= 1 + 2 = 3$ కి.మీ.

$(\because BF = CD = 2$ కి.మీ.)

అదేవిధంగా $FE = DE - DF$

$= 9 - 5 = 4$ కి.మీ.

$(\because DF = BC = 5$ కి.మీ.)

పై పటంలో మనకు కావాల్సిన దూరం

$AE = \sqrt{AF^2 + FE^2}$

$AF = 3$ కి.మీ. $FE = 4$ కి.మీ.

$AE = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{9+16} \quad = \sqrt{25}$

$AE = 5$ కి.మీ.

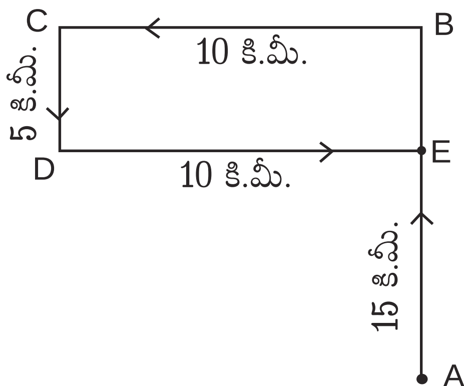
$\therefore$ సునీత తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి 5 కి.మీ.ల దూరంలో ఉంది.

సమాధానం: (సి) 5 కి.మీ.

4. మహేశ్ తన ఇంటి నుంచి 15 కి.మీ. ఉత్తరం వైపు ప్రయాణించి, పడమర దిశలో తిరిగి 10 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. మళ్లీ దక్షిణం వైపు తిరిగి 5 కి.మీ. ప్రయాణించి, చివరగా తూర్పు దిశలో 10 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. ఇప్పుడు అతను తన ఇంటి నుంచి ఏ దిశలో ఉన్నాడు?

ఎ) తూర్పుబి) పడమర

సి) ఉత్తరండి) దక్షిణం



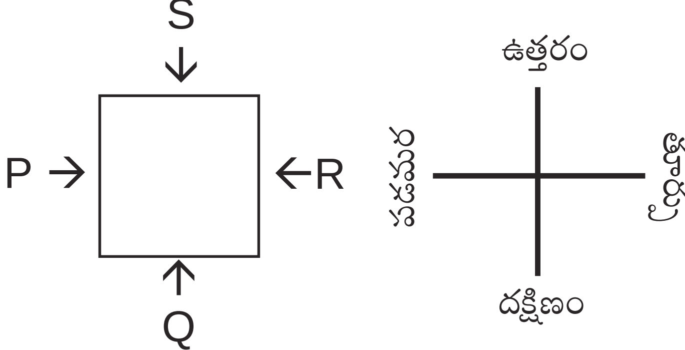
పై పటం ఆధారంగా మహేశ్ తన ప్రారంభ స్థలానికి (ఇంటికి) ఉత్తరం దిశలో ఉన్నాడని చెప్పవచ్చు.

సమాధానం: (సి) ఉత్తరం

5. P, Q, R, Sలు క్యారమ్స్ ఆడుతున్నారు. P, Rలు ఒక టీంలో, S, Qలు మరో టీంలో ఉన్నారు. Rకు కుడివైపున S ఉన్నాడు. R పడమర ముఖుడై ఉన్నాడు. అయితే Q ఏ దిశను చూస్తున్నాడు?

ఎ) ఉత్తరం బి) దక్షిణం

సి) తూర్పు డి) పడమర



ఒక టీంలో ఉన్న వ్యక్తులు ఎదురెదురుగా ఉంటారు. అంటే P ఎదురుగా R, Q ఎదురుగా S కూర్చున్నారు.

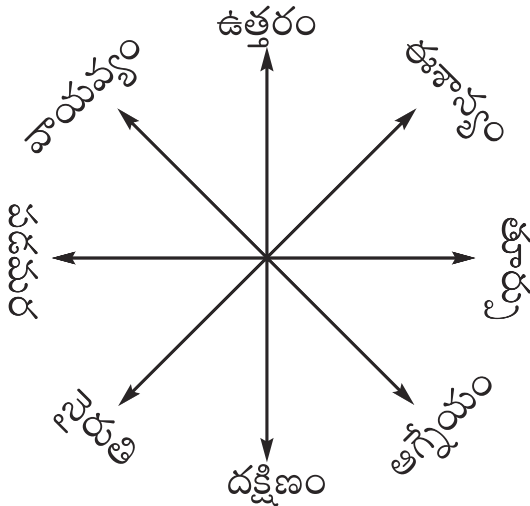
R పడమర ముఖుడై ఉండాలంటే తూర్పు వైపు కూర్చోబెట్టాలి. Rకు కుడి వైపున S ఉన్నాడు. అంటే S దక్షిణం వైపు చూస్తున్నాడు. S టీం మెంబర్ Q, S ఎదురుగా ఉండాలి. అంటే Q ఉత్తర దిశను చూస్తూ ఉంటాడు.

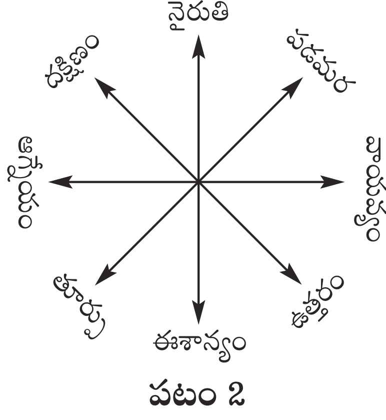
సమాధానం: (ఎ) ఉత్తరం

6. **ఒకవేళ ఆగ్నేయ దిశను ఉత్తరంగా, ఈశాన్యాన్ని పడమరగా సూచిస్తే పడమర దిశను ఏ దిశతో సూచించాలి?**

ఎ) ఈశాన్యం బి) వాయువ్యం

సి) ఆగ్నేయం డి) నైరుతి





పటం 2

పటం (1) నిజమైన దిక్కులను సూచిస్తుంది.

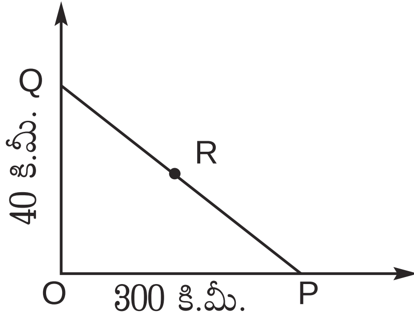
పటం (2) ప్రశ్నలో ఇచ్చిన దత్తాంశం ఆధారంగా దిక్కులను గుర్తించాం. ప్రశ్నలో ఇచ్చిన దత్తాంశం ప్రకారం పడమర దిశను ఆగ్నేయ దిశలో సూచించవచ్చు.

సమాధానం: (సి) ఆగ్నేయం

7. **కింది చిత్రంలో Oకు తూర్పు దిశలో 300 కి.మీ.ల దూరంలో P ఉంది. Oకు ఉత్తర దిశలో 400 కి.మీ.ల దూరంలో Q ఉంది. P, Qలకు సరిగ్గా మధ్యలో R ఉంది. అయితే R, Qల మధ్య దూరం ఎంత?**

   ఎ) 250 కి.మీ. బి) $250\sqrt{2}$ కి.మీ.

   సి) 300 కి.మీ. డి) 350 కి.మీ.



POQ అనేది లంబకోణ త్రిభుజం. ఇందులో

$$PQ = \sqrt{OP^2 + OQ^2}$$
$$= \sqrt{300^2 + 400^2}$$
$$= \sqrt{90000 + 160000}$$
$$= \sqrt{250000}$$

PQ = 500 కి.మీ.

P, Qలకు సరిగ్గా మధ్యలో R ఉంది.

$\therefore$ R, Qల మధ్య దూరం $= \frac{500}{2}$

= 250 కి.మీ.

ప్రయత్నించండి చూద్దాం!

1. **ఒక వ్యక్తి పడమర దిశలో 10 కి.మీ. ప్రయా ణించి, కుడి వైపు మరో 5 కి.మీ. ప్రయాణిం చాడు. మళ్లీ కుడి వైపు 19 కి.మీ. ప్రయాణించి చివరగా దక్షిణ దిశలో 17 కి.మీ. ప్రయాణిం చాడు. ఇప్పుడు అతను తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఎంత దూరంలో ఉన్నాడు?**

   ఎ) 17 కి.మీ.　　బి) 21 కి.మీ.

   సి) 25 కి.మీ.　　డి) 29 కి.మీ.

   సమాధానం : (సి)

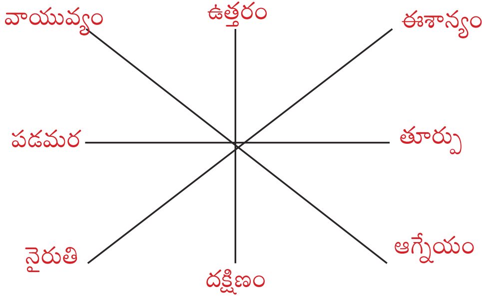
దిక్కులు-దూరాలు-6

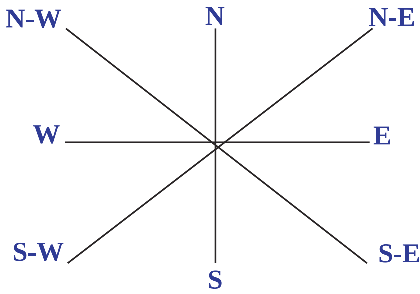
దిక్కులు – మార్కులకు దిశా నిర్దేశకాలు

ఇటీవల దాదాపు అన్ని పోటీ పరీక్షల్లోనూ దిక్కులపై ప్రశ్నలు అడుగుతున్నారు. వీటిపై వస్తున్న ప్రశ్నలు చేయాలంటే ముఖ్యంగా మూడు అంశాలపై కనీస అవగాహన ఉండాలి. అవి దిక్కులు, కుడి లేదా ఎడమ వైపు తిరిగినప్పుడు వెళ్తున్న దిశ, పైథాగరస్ సిద్ధాంతం

దిక్కులు:

కాగితంపై దిక్కులను గుర్తించగలగాలి. దీనికి సులువైన సూత్రం ''ఉఈతూఆదనైపవా''. అంటే ఉత్తరం, ఈశాన్యం, తూర్పు, ఆగ్నేయం, దక్షిణం, నైరుతి, పడమర, వాయవ్యం. ఈ అక్షరాలను ఇదే వరుసక్రమంలో గుర్తుంచుకుంటే సరిపోతుంది. దీన్ని కింది పటం ద్వారా చూద్దాం.

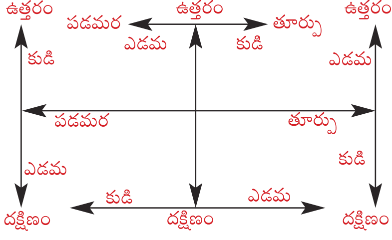




కుడి లేదా ఎడమవైపు తిరిగినప్పుడు వెళ్తున్న దిశ:

'ఒక వ్యక్తి కొంత దూరం ప్రయాణించి కుడి వైపు లేదా ఎడమవైపు తిరిగాడు' లాంటి వాక్యాలు మనకు ఈ దిక్కులపై వచ్చే ప్రశ్నల్లో కనిపిస్తాయి. కుడివైపు లేదా ఎడమవైపు తిరిగాడు అన్నప్పుడు, వారు వెళ్లే దిశ కనుక్కోవాలంటే అక్కడ మనమే ఉన్నట్లు ఊహించుకుంటే ఆ దిశను సులభంగా గుర్తించవచ్చు. ఇక్కడ మరో సులభమైన సూత్రాన్ని చూద్దాం. ఒక వ్యక్తి కొంత దూరం ప్రయాణించిన తర్వాత కుడివైపు వెళ్లాడు అంటే సవ్యదిశలో వెళ్లాడ ని, ఎడమవైపు అంటే అపసవ్య దిశలో వెళ్లాడని గుర్తించాలి. దీన్ని కింది

పటం ద్వారా చూద్దాం.



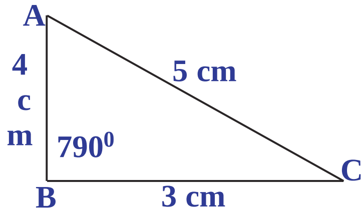
దీన్ని ఒక పట్టిక ద్వారా పరిశీలిద్దాం:

ప్రయాణించిన దిశ	కుడివైపు తిరిగితే	ఎడమవైపు తిరిగితే
ఉత్తరం	తూర్పు	పడమర
దక్షిణం	పడమర	తూర్పు
తూర్పు	దక్షిణం	ఉత్తరం
పడమర	ఉత్తరం	దక్షిణం

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం:

దిక్కులపై వచ్చే ప్రశ్నల్లో కొన్ని సందర్భాల్లో ప్రారంభ స్థలం నుంచి తుది స్థలం ఏదో ఒక మూలలో ఉంటుంది. అక్కడ పైథాగరస్ సూత్రం ఉపయోగపడుతుంది.

''లంబకోణ త్రిభుజంలో రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తం, కర్ణం వర్గానికి సమానం అవుతుంది''.



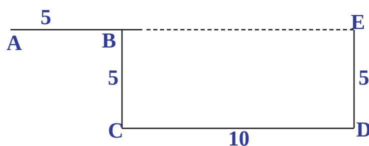
కర్ణం^{2} = భుజం^{2} + భుజం^{2}

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం:

1. ఒక వ్యక్తి తూర్పు దిశలో 5 కి.మీ. దూరం ప్రయాణించి కుడివైపు తిరిగి మరో 5 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. మళ్లీ ఎడమవైపు 10 కి.మీ. ప్రయాణించి చివరగా ఎడమవైపు మరో 5 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. ఇప్పుడు ఆ వ్యక్తి తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఏ దిశలో ఎంత దూరంలో ఉన్నాడు?

ఆ వ్యక్తి ప్రయాణించిన దూరాన్ని పటం ద్వారా చూపిస్తే...



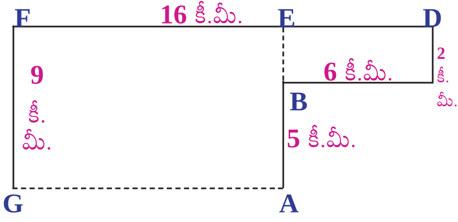
పటం చూడగానే ఆ వ్యక్తి తూర్పు దిశలో ఉన్నాడని చెప్పొచ్చు.

కావాల్సిన దూరం AE = AB + BE

$= 5 + 10 (\because BE = CD = 10 km)$ = 15 కి.మీ.

∴ ఆ వ్యక్తి తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి తూర్పు దిశలో 15 కి.మీ. దూరంలో ఉన్నాడు.

2. ఒక వ్యక్తి ఉత్తరం దిశలో 5 కి.మీ. ప్రయా ణించి, కుడివైపు మరో 6 కి.మీ. ప్రయాణిం చాడు. మళ్లీ ఎడమవైపు 4 కి.మీ. ప్రయాణించి, వెంటనే ఎడమవైపు తిరిగి 16 కి.మీ. ప్రయా ణించాడు. చివరగా దక్షిణం వైపు 9 కి.మీ. ప్ర యాణించాడు. ఇప్పుడు ఆ వ్యక్తి తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఏ దిశలో ఎంత దూరంలో ఉన్నాడు.



- ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఆ వ్యక్తి పడమర దిశలో ఉన్నాడు.

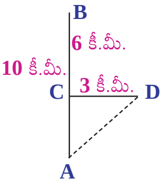
  ప్రారంభ, అంతిమ స్థలాల మధ్య దూరం

  AG = DF – DE

  $= 16 - 6 (\because DE = BC = 6 km)$ = 10 కి.మీ.

  ∴ ఆ వ్యక్తి తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి పడమర దిశలో 10 కి.మీ.ల దూరంలో ఉన్నాడు.

3. రోహన్ ఉత్తరం వైపు 10 కి.మీ. నడిచి, అక్కడి నుంచి దక్షిణం దిశలో 6 కి.మీ. నడిచాడు. తర్వాత తూర్పు దిశలో 3 కి.మీ. ప్రయాణిం చాడు. ఇప్పుడు రోహన్ తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఏ దిశలో, ఎంత దూరంలో ఉన్నాడు.



- రోహన్ ఉత్తరం వైపు 10 కి.మీ. ప్రయాణించి, మళ్లీ దక్షిణం వైపు 6 కి.మీ. ప్రయాణించి C వరకు చేరుకున్నాడు.

  AC = AB – BC = 10 – 6 = 4 కి.మీ.

CD = 3 కి.మీ.

కావాల్సిన దూరం

$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2}$

$= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$ = 5 కి.మీ.

∴ రోహన్ తన ప్రారంభ స్థలం నుంచి ఈశాన్య దిశలో 5 కి.మీ.ల దూరంలో ఉన్నాడు.

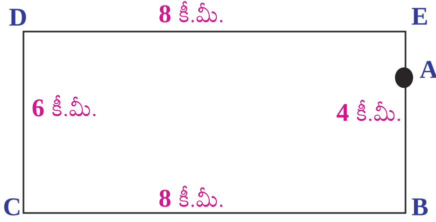
గత ప్రశ్నలు

1. ఒక వ్యక్తి 4 కి.మీ. దక్షిణం దిశకు, తర్వాత 8 కి.మీ. పడమర వైపు, తర్వాత 6 కి.మీ. ఉత్తరానికి, తర్వాత 8 కి.మీ. తూర్పు దిశకు, తర్వాత 2 కి.మీ. దక్షిణం వైపు ప్రయాణం చేస్తే తను ప్రారంభ స్థలానికి ఎంత దూరంలో ఉంటాడు?**(జె.ఎల్.-2004)**

   1) 8 కి.మీ. 2) 10 కి.మీ.

   3) 12 కి.మీ. 4) 28 కి.మీ.

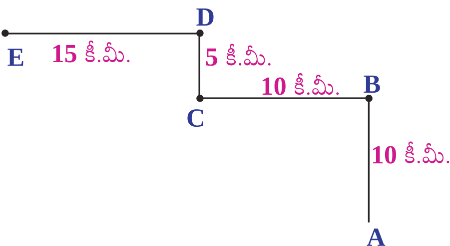
● **ఆప్షన్స్‌లో సరైన సమాధానం ఇవ్వలేదు. దీనికి సరైన సమాధానం ఆ వ్యక్తి ప్రారంభ స్థలంలోనే ఉంటాడు.**



ఆ వ్యక్తి ప్రయాణించిన దూరాన్ని పటం ద్వారా చూపిస్తే...

ఆ వ్యక్తి పటంలో చూపించిన విధంగా A నుంచి ప్రయాణించి మళ్లీ Aకి చేరుకున్నాడు. కాబట్టి ఆ వ్యక్తి తన ప్రారంభ స్థలంలోనే ఉన్నాడని చెప్పొచ్చు.

2. అమోల్ ఉత్తరాభిముఖుడై నిల్చున్నాడు. అదే స్థితిలో నేరుగా 10 కి.మీ. నడిచి, ఎడమవైపు తిరిగి మరో 10 కి.మీ. నడిచి, కుడివైపు తిరిగి 5 కి.మీ. నడిచి, చివరగా ఎడమవైపు తిరిగి 15 కి.మీ. నడిచి ఉద్యానవనం చేరుకుంటాడు. ఇప్పుడు అమోల్ ఏ దిక్కుకు అభిముఖంగా నిల్చున్నాడు **(గ్రూప్-I - 2002, బ్యాక్‌లాగ్)**



పటం ఆధారంగా అమోల్ పడమర దిశకు అభిముఖంగా ఉన్నాడని సులభంగా చెప్పొచ్చు.

3. తూర్పు-పడమరలకు విస్తరించిన తిన్నని రోడ్డుపై A,B లు 20 కి.మీ. మధ్య దూరంలో నిల్చున్నారు.

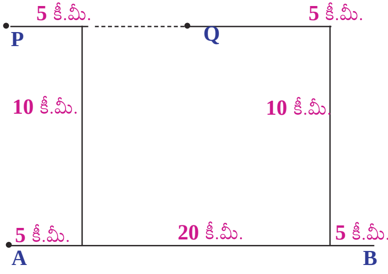
A తూర్పు వైపు, B పడమర వైపు నడవటం మొదలుపెట్టి ఒక్కొక్కరు 5 కి.మీ. పూర్తి చేశారు. A తనకు ఎడమవైపు తిరిగి మరో 10 కి.మీ. నడిచాడు. B తనకు కుడివైపు తిరిగి అదే వేగంతో 10 కి.మీ. నడి చాడు. తర్వాత ఇద్దరూ వారి వారి ఎడమవైపు తిరిగి ఒకే వేగంతో 5 కి.మీ. నడిచారు. ఇప్పుడు A,B ల మధ్య దూరమెంత?

(గ్రూప్-I – 2003, బ్యాక్‌లాగ్)

1) 10 కి.మీ. 2) 5 కి.మీ.

3) 20 కి.మీ. 4) 30 కి.మీ.

సమాధానం: 10 కి.మీ.



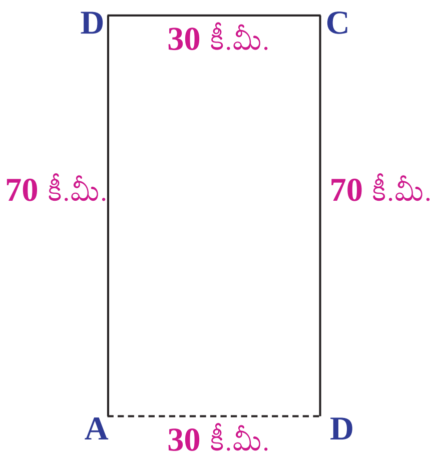
P, Qల మధ్య దూరం = 10 కి.మీ.

4. జాన్ ఉత్తరం వైపు 70 కి.మీ. ప్రయాణం సాగించాడు. తర్వాత కుడివైపు తిరిగి 30 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. మళ్లీ కుడివైపు తిరిగి 70 కి.మీ. ప్రయాణించాడు. అయితే జాన్ ప్రయా ణం మొదలుపెట్టిన చోటుకు ఎంత దూరంలో ఉన్నాడు? **(గ్రూప్-I – 2007)**

1) 130 కి.మీ. 2) 100 కి.మీ.

3) 30 కి.మీ. 4) 70 కి.మీ.

సమాధానం: 30 కి.మీ.



పై పటం ఆధారంగా: జాన్ ప్రయాణం మొదలు పెట్టిన చోటుకు ఉన్న దూరం AD = 30 కి.మీ.

క్యాలెండరు

'క్యాలెండరు' అంశం నుంచి సివిల్స్, గ్రూప్- 1, గ్రూప్-2 పరీక్షల్లో తప్పనిసరిగా ప్రశ్నలు వస్తు న్నాయి. గ్రూప్-1 మెయిన్స్, పేపర్-5లో 3 లేదా 4 ప్రశ్నలు వచ్చే అవకాశముంది. గత సంచికలో 'క్యాలెండరు'కు సంబంధించిన ప్రాథమిక అంశాలు, భావనలను చర్చించాం. ఇప్పుడు గ్రూప్-1 పరీక్షకు ఉపకరించే కొన్ని సమస్యలను పరిశీ లిద్దాం. 'క్యాలెండరు'కు సంబంధించిన సమస్యలను సాధించేటప్పుడు సరైన స్టెప్స్ రాయడం చాలా ముఖ్యం.

ఉదాహరణ:

భారత రాజ్యాంగం ఏ రోజు అమల్లోకి వచ్చింది?

సమాధానం:

భారత రాజ్యాంగం అమల్లోకి వచ్చింది 26- 01-1950న కాబట్టి ఈ తేదీ ఏ వారమో కనుక్కోవాలి.

క్రీ.శ. 01-01-01 నుంచి పై తేదీ వరకు ఉండే కాలవ్యవధి = 1949 సంవత్సరాలు + 26 రోజులు.

= 1900 సంవత్సరాలు + 49 సంవత్సరాలు + 26 రోజులు - (I)

1900 సంవత్సరాలకు మిగులు రోజులు = 1

ఆపై 49 సంవత్సరాల్లోని లీపు సంవత్సరాలు = 12

($\because$ 49ని 4తో భాగిస్తే వచ్చే భాగఫలం = 12)

$\therefore$ 49 సంవత్సరాలకు మిగులు రోజులు = 49 + 12 = 61

26 రోజుల్లోని మిగులు రోజులు = 5

($\because$ 26ని 7తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం = 5)

ఇప్పుడు (I) లోని మొత్తం మిగులు రోజులు

= 1 + 61 + 5

= 67

'67'ని '7'తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం = 4

$\therefore$ మొత్తం మిగులు రోజులు = 4

'4' అనేది గురువారం కోడ్.

$\therefore$ 1950, జనవరి 26న గురువారం.

అంటే భారత రాజ్యాంగం అమల్లోకి వచ్చింది గురువారం.

ఉదాహరణ:

1760, జూన్‌లో ఏయే తేదీల్లో ఆదివారం వస్తుందో కనుక్కోండి?

సమాధానం:

మొదట 01-06-1760న ఏ వారమో కనుక్కుం దాం.

క్రీ.శ. 01-01-01 నుంచి పై తేదీ వరకు ఉండే కాలవ్యవధి = 1700 సంవత్సరాలు + 59 సంవత్సరాలు + జనవరి నుంచి మే వరకు + 1 రోజు - (I)

1700 సంవత్సరాలకు మిగులు రోజులు = 5

ఆపై 59 సంవత్సరాల్లోని లీపు సంవత్సరాలు = 14.
(∵ 59ని '4'తో భాగిస్తే వచ్చే భాగఫలం = 14)

∴ 59 సంవత్సరాలకు మిగులు రోజులు = 59 + 14 = 73.

అదేవిధంగా జనవరిలో 3, ఫిబ్రవరిలో 1, మార్చిలో 3, ఏప్రిల్‌లో '2', మేలో '3' మిగులు రోజులుంటాయి.

ఇప్పుడు (I) లోని మొత్తం మిగులు రోజులు = 5 + 73 + 3 + 1 + 3 + 2 + 3 + 1
= 91

'91'ని '7'తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం = 0.

∴ మొత్తం మిగులు రోజులు = '0'

'0' అనేది ఆదివారం కోడ్.

∴ 01-06-1760న ఆదివారం అవుతుంది.

అదే విధంగా 1+7 = 8, 8+7 = 15, 15+7 = 22, 22+7 = 29 తేదీల్లో కూడా ఆదివారమే అవుతుంది.

∴ 1760, జూన్‌లో 1, 8, 15, 22, 29 తేదీల్లో ఆదివారం వస్తుంది.

ఉదాహరణ:

1995 సంవత్సర క్యాలెండరు 2006కు కూడా సరిపోతుందని నిరూపించండి?
(ఏపీపీఎస్సీ, మోడల్ పేపర్, గ్రూప్-1, పేపర్-5)

సమాధానం:

రెండు సంవత్సరాలకు ఒక క్యాలెండరు వర్తించా లంటే మొదట ఆ రెండు సంవత్సరాలు ఒకే రకమైన సంవత్సరాలు (లీపు/సాధారణ) అయి ఉండాలి. దత్తాంశంలోని 1995, 2006 రెండు కూడా సాధారణ సంవత్సరాలే.

ఇప్పుడు రెండు సంవత్సరాల్లోని జనవరి 1 ఒకే రోజైతే ఆ రెండు సంవత్సరాలకు ఒకే క్యాలెండరు వర్తిస్తుంది.

అంటే 01-01-1995, 01-01-2006 తేదీల్లో ఒకే రోజు కావాలి. అంటే పై రెండు తేదీల మధ్య మిగులు రోజుల సంఖ్య 'సున్నా' కావాలి.

పై రెండు తేదీల మధ్య కాల వ్యవధి =
11 సంవత్సరాలు
ఈ 11 సంవత్సరాల్లో 1996, 2000, 2004 అనే మూడు లీపు సంవత్సరాలున్నాయి.
∴ ఈ 11 సంవత్సరాల్లోని మిగులు రోజులు =
11 + 3
= 14
'14'ని '7'తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం = '0'
∴ 01-01-1995, 01-01-2006ల మధ్య మిగులు రోజులు సున్నా.
∴ 01-01-1995, 01-01-2006 తేదీలు ఒకే వారం అవుతాయి.
∴ 1995కి, 2006కి ఒకే క్యాలెండరు వర్తిస్తుంది.
ఇప్పుడు ఇటువంటి మోడల్ ప్రశ్న పరీక్షలో వస్తే స్టెప్స్ ఎలా రాయాలో చూద్దాం.

ఉదాహరణ:
2005, 2011 సంవత్సరాలకు ఒకే క్యాలెండరు వర్తిస్తుందని నిరూపించండి?
సమాధానం:
2005, 2011 రెండు కూడా సాధారణ సంవత్సరాలే – (I)
01-01-2005, 01-01-2011ల మధ్య ఉండే కాలవ్యవధి = 6 సంవత్సరాలు.
ఈ 6 ఏళ్లలో 2008 లీపు సంవత్సరం.
∴ ఈ 6 సంవత్సరాల్లో మిగులు రోజులు
= 6 + 1 = 7
'7'ని '7'తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం = 0
∴ 01-01-2005, 01-01-2011ల మధ్య ఉండే మిగులు రోజుల సంఖ్య = 0.
అంటే 01-01-2005న, 01-01-2011న ఒకే రోజు అవుతుంది – (II)
(I), (II)ల నుంచి 2005కు, 2011కు ఒకే క్యాలెండరు వర్తిస్తుందని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ:
ఈ రోజు శనివారం అయితే '87' రోజుల తర్వాత '87' రోజులకు ముందు ఏ వారమవుతుందో కనుక్కోండి?
సమాధానం:
'87' రోజుల్లోని మిగులు దినాలు = 3
(∵ '87'ని '7'తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం = 3)

శనివారం నుంచి '3' రోజులు ముందుకు వెళితే మంగళవారం వస్తుంది. కాబట్టి '87' రోజుల తర్వాత మంగళవారం అవుతుంది.
అలాగే శనివారం నుంచి '3' రోజులు వెనక్కి వెళ్తే బుధవారం వస్తుంది. కాబట్టి '87' రోజుల ముందు బుధవారం అవుతుంది.

ఉదాహరణ:
10-05-2009న ఆదివారం అయితే
i) 10-5-2010
ii) 10-5-2008
iii) 10-5-2012
iv) 10-5-2006న ఏయే రోజులు అవుతాయో కనుక్కోండి?
సమాధానం:
i) 10-5-2009, 10-05-2010ల మధ్య ఉండే కాల వ్యవధి = ఒక సాధారణ సంవత్సరం
ఈ కాల వ్యవధిలోని మిగులు రోజులు = 1
ఆదివారం నుంచి ఒక రోజు ముందుకు వెళ్తే సోమవారం వస్తుంది.
∴ 10-05-2010న సోమవారం.
ii) 10-05-2009, 10-05-2008ల మధ్య ఉండే కాల వ్యవధి = ఒక సాధారణ సంవత్సరం
మిగులు రోజులు= 1
ఆదివారం నుంచి ఒక రోజు వెనక్కి వెళ్తే శనివారం వస్తుంది.
∴ 10-05-2008న శనివారం అవుతుంది.
iii) 10-05-2009, 10-05-2012ల మధ్య ఉండే కాల వ్యవధి = 3 సంవత్సరాలు.
ఈ '3' సంవత్సరాల్లో ఒక లీపు సంవత్సరం ఉంది. (2012, ఫిబ్రవరి 29)
∴ మిగులు రోజులు = 3 + 1 = 4
ఆదివారం నుంచి 4 రోజులు ముందుకు వెళ్తే గురువారం వస్తుంది.
∴ 10-05-2012న గురువారం అవుతుంది.
iv) 10-05-2009, 10-05-2006 మధ్య ఉండే కాల వ్యవధి = 3 సంవత్సరాలు.
ఈ '3' సంవత్సరాల్లో ఒక లీపు సంవత్సరం ఉంది. (2008)
∴ మిగులు రోజులు = 3 + 1 = 4
ఆదివారం నుంచి 4 రోజులు వెనక్కి వెళ్తే 'బుధ' వారం వస్తుంది.
∴ 10-05-2006న 'బుధవారం' అవుతుంది.

గడియారాలు



సమయాన్ని తప్పుగా సూచించే గడియారాలకు సంబంధించిన ప్రాథమిక అంశాలు, కొన్ని సమస్య లపై వివిధ పోటీపరీక్షల్లో ప్రశ్నలు వస్తున్నాయి. నిజానికి ఈ అంశం కొద్దిగా కష్టతరమైనప్పటికీ అందులోని మౌలిక భావనలను అవగాహన చేసుకుంటే సులభతరంగా ఉంటుంది.

ప్రామాణిక గడియారం

సమయాన్ని కచ్చితంగా సూచించే గడియారాన్ని ప్రామాణిక గడియారం అంటారు.

సమయాన్ని కోల్పోవడం

ఏదైనా ఒక గడియారం నెమ్మదిగా తిరుగుతుంటే ఆ గడియారం సమయాన్ని కోల్పోతుంది అని అంటారు.

ఉదా: ప్రామాణిక గడియారంలో సమయం 4 PM అయినప్పుడు, మన గడియారంలో 3:30 PM అయితే 30 నిమిషాలను కోల్పోయినట్లు లేదా నష్టపోయినట్లు అర్థం.

సమయాన్ని లాభం పొందడం

ఏదైనా ఒక గడియారం వేగంగా తిరుగుతుంటే ఆ గడియారం సమయాన్ని లాభం పొందుతుంది అని అంటారు.

ఉదా: ప్రామాణిక గడియారంలో సమయం 4 PM అయినప్పుడు, మన గడియారంలో 4:30 PM అయితే 30 నిమిషాలను లాభం పొందినట్లు అర్థం.

రెండు ముల్లుల వరుస కలయికల మధ్య కాలం

ఒక ప్రామాణిక గడియారంలో గంటల ముల్లు, నిమిషాల ముల్లు ఒకసారి కలిసిన తర్వాత మళ్లీ వెంటనే కలవడానికి $65\frac{5}{11}$ నిమిషాలు పడుతుందన్న విషయాన్ని గుర్తుంచుకోవాలి.

ఏదైనా ఒక గడియారంలో రెండు ముల్లులు ఒకసారి కలిసిన తర్వాత మళ్లీ వెంటనే కలవడానికి పట్టే సమయం 'P' నిమిషాలు అనుకుంటే...

Case-I :

$P > 65\frac{5}{11}$ అయితే – ఆ గడియారం నెమ్మదిగా లేదా నిదానంగా తిరుగుతున్నట్లు, ఆ గడియారం సమయాన్ని కోల్పోతున్నట్లు లెక్క.

ఆ గడియారం ‘P’ నిమిషాల్లో $\left(P - 65\frac{5}{11}\right)$ నిమిషాలను కోల్పోతుంది.

Case-II :

$P < 65\frac{5}{11}$ అయితే – ఆ గడియారం వేగంగా తిరుగుతున్నట్లు, ఆ గడియారం సమయాన్ని లాభం పొందుతుందని అర్థం.

ఆ గడియారం ‘P’ నిమిషాల్లో $\left(65\frac{5}{11} - P\right)$ నిమిషాలను కోల్పోతుంది.

పై సమాచారాన్ని అంతా క్షుణ్ణంగా చదివి అర్థం చేసుకుంటే ఎటువంటి సమస్యనైనా సుల భంగా సాధించవచ్చు.

ఉదాహరణలు

1. ఒక గడియారం ఉదయం 5 గంటలకు సరైన సమయాన్ని సూచించింది. అది 24 గంటల్లో 16 నిమిషాలను కోల్పోతుంది. అయితే నాలుగో రోజు రాత్రి ఆ గడియారంలో సమయం 10 గంటలు అయితే సరైన సమయం ఎంత?

సమాధానం:

దత్తాంశంలోని గడియారం సమయాన్ని కోల్పోతుంది. అంటే అది నిదానంగా తిరుగుతుందన్నమాట. ఇటువంటి సమస్యలను సాధించాలంటే ప్రామాణిక గడియారం ప్రకారం కాలవ్యవధిని, దత్తాంశంలోని గడియారం ప్రకారం కాలవ్యవధిని పోల్చాలి.

24 గంటల్లో దత్తాంశంలోని గడియారం 16 ని॥లు కోల్పోతుంది. అంటే ఈ గడియారం ప్రకారం 23 గంటల 44 నిమిషాలు = ప్రామాణిక గడియారం ప్రకారం 24 గంటలు.

23 గంటల 44 నిమిషాలు

= $23\frac{44}{60}$ గంటలు = $23\frac{11}{15}$ గంటలు

= 356/15 గంటలు

అంటే

356/15 గంటలకు $\longrightarrow$ 24 గంటలు $\longrightarrow$ (1)

మొదటి రోజు ఉదయం 5 గంటల నుంచి నాలుగో రోజు రాత్రి 10 గంటల వరకు కాలవ్యవధి = 24 + 24 + 24 + 17 = 89 గంటలు

ఇప్పుడు దత్తాంశంలో గడియారం ప్రకారం 89 గంటల కాలవ్యవధి ప్రామాణిక గడియారం ప్రకారం ఎంత కాలవ్యవధికి సమానమో కనుక్కోవాలి.

అంటే

89 గంటలకు $\longrightarrow$ ఎన్ని గంటలు $\longrightarrow$ (2)

(1), (2)ల నుంచి సరైన కాలవ్యవధి

$= \frac{24}{356/15} \times 89$

$= 24 \times \frac{15}{356} \times 89 = 90$ గంటలు

∴ దత్తాంశంలోని గడియారం 90 – 89 = 1 గంట సమయాన్ని కోల్పోతున్నట్లు లెక్క.

∴ సరైన సమయం = రాత్రి 11 గంటలు.

గమనిక: సమస్యలోని మౌలిక భావన అందరికీ అర్థం కావాలనే ఉద్దేశంతో స్టెప్పులను విపులంగా ఇచ్చాం. నిజానికి ఇంత విపులంగా రాయనవసరం లేదు.

2. ఒక గడియారంలో రెండు ముల్లుల వరుస కలయికల మధ్య కాలం 65 నిమిషాలు అయితే ఆ గడియారం ఒక రోజులో ఎంత సమయాన్ని తప్పుగా సూచిస్తుంది?

సమాధానం:

దత్తాంశంలో $P = 65$ నిమిషాలు

$P < 65\frac{5}{11}$ కాబట్టి దత్తాంశంలోని గడియారం వేగంగా తిరుగుతున్నట్లు, అది సమయాన్ని లాభం పొందుతున్నట్లు.

65 నిమిషాల్లో $\left(65\frac{5}{11} - 65\right)$ నిమిషాలను లాభం పొందుతుంది.

65 నిమిషాలకు ⟶ 5/11 నిమిషాలు లాభం ⟶ (1)

24 గంటలు = 24 × 60 నిమిషాలు

= 1440 నిమిషాలు

1440 నిమిషాలకు ⟶ ఎన్ని నిమిషాలు లాభం ⟶ (2)

(1), (2)ల నుంచి ఈ గడియారం ఒక్క రోజులో లాభం పొందే సమయం

$= \frac{5/11}{65} \times 1440$ నిమిషాలు

$= \frac{5}{11} \times \frac{1440}{65}$ నిమిషాలు

$= \frac{1440}{143} = 10\frac{10}{143}$ నిమిషాలు

అంటే ఈ గడియారం ఒక్కరోజులో $10\frac{10}{143}$ నిమిషాలు ఎక్కువ చూపిస్తుంది.

3. వేగంగా తిరుగుతున్న ఒక గడియారం సోమవారం మధ్యాహ్నం 12 గంటలకు రెండు నిమిషాలు తక్కువ చూపిస్తోంది. ఆ తర్వాత సోమవారం మధ్యాహ్నం 2 గంటలకు 4 నిమిషాల 48 సెకన్లు ఎక్కువ

చూపించింది. అయితే ఆ గడియారం ఎప్పుడు సరైన సమయాన్ని సూచించింది?

(R.R.B.-2001)

సమాధానం:

సోమవారం మధ్యాహ్నం 12 గంటల నుంచి తర్వాత సోమవారం మధ్యాహ్నం 2 గంటల వరకు కాలవ్యవధి

= 7 రోజులు + 2 గంటలు

= 7 × 24 + 2 గంటలు

= 170 గంటలు

ఈ 170 గంటల్లో గడియారం లాభం పొందిన సమయం = 2 ని॥లు + 4 ని॥ల 48 సెకన్లు

$$= 2 + 4\frac{48}{60} = 2 + 4\frac{4}{5}$$

$$= 2 + \frac{24}{5} = \frac{34}{5}$$ నిమిషాలు

ప్రారంభంలో ఆ గడియారం రెండు నిమిషాలు వెనుకబడి ఉంది కాబట్టి రెండు నిమిషాలు లాభం పొందితే సరైన సమయాన్ని సూచిస్తుంది.

34/5 ని॥లు లాభం పొందడానికి 170 గంటలు కావాల్సి వస్తే '2' నిమిషాలు లాభం పొందడానికి కావాల్సిన కాలవ్యవధి

$$= \frac{170}{34/5} \times 2 = \frac{170}{34} \times 2 \times 5 = 50$$ గంటలు

సోమవారం మధ్యాహ్నం 12 గంటల నుంచి '50' గంటల కాలవ్యవధి అంటే బుధవారం మధ్యాహ్నం '2' గంటలు అవుతుంది.

∴ బుధవారం మధ్యాహ్నం '2' గంటలకు ఆ గడియారం సరైన సమయాన్ని సూచిస్తుంది.

క్యాలెండర్ - గడియారాలు

క్యాలెండర్, గడియారాలకు సంబంధించిన ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 :

అనిత, భావన, సీత అనే ముగ్గురు విద్యార్థినులు ఒకే రైల్లో ప్రయాణిస్తున్నారు. అనితకు తాము మార్చి నెలలో పిక్నిక్ వెళ్లినట్లు గుర్తు. భావనకు వారు పిక్నిక్‌కి వెళ్లిన రోజు రెండో శనివారం అని గుర్తు. సీత పుట్టినరోజు నవంబర్ 1వ తేదీ. ఆ సంవత్సరంలో సీత బుధవారం కొన్నట్లయితే వారు పిక్నిక్‌కి వెళ్లిన తేదీని కనుక్కోండి?

సమాధానం:

దత్తాంశం ప్రకారం అనిత, భావన, సీతలు పిక్నిక్ వెళ్లింది మార్చి నెలలోని రెండో శనివారం.

ఆ సంవత్సరంలో నవంబర్ 1న బుధవారం.

మొదట మార్చి 1న ఏ వారం అవుతుందో కనుక్కుందాం.

మార్చి 1 నుంచి నవంబర్ 1 వరకు గల కాలవ్యవధి

= మార్చి + ఏప్రిల్ + మే + జూన్ + జులై + ఆగస్టు + సెప్టెంబర్ + అక్టోబర్ నెలలు

పై కాలవ్యవధిలోని మిగులు రోజుల సంఖ్య

$= 3 + 2 + 3 + 2 + 3 + 3 + 2 + 3$

$= 21$

21ని 7తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం = 0

$\therefore$ మార్చి 1, నవంబర్ 1ల మధ్య ఉండే మిగులు రోజుల సంఖ్య = 0

అంటే మార్చి 1న కూడా బుధవారమే అవుతుంది. మార్చి 4న మొదటి శనివారం అవుతుంది.

$\Rightarrow 4 + 7 = 11$న రెండో శనివారం అవుతుంది.

$\therefore$ అనిత, భావన, సీతలు పిక్నిక్‌కి వెళ్లింది మార్చి నెలలోని 11వ తేదీ.

గమనిక:

పై ఉదాహరణ నుంచి మనం కింది విషయాన్ని గమనించొచ్చు.

ఏదైనా ఒక సంవత్సరంలో మార్చి నెలలోని ఒక తేదీ, అదే సంవత్సరం నవంబర్ నెలలోని అదే తేదీ

రెండూ ఒకేరోజు అవుతాయి. ఎందుకంటే మార్చి 1 నుంచి నవంబర్ 1కి మధ్య గల మిగులు రోజుల సంఖ్య సున్నా కాబట్టి.

ఉదాహరణ 2:

2003 క్యాలెండర్ తిరిగి వెంటనే ఏ సంవత్స రంలో పునరావృతమవుతుంది?

సమాధానం:

రెండు సంవత్సరాలకూ ఒకే క్యాలెండర్ వర్తిం చాలంటే

(i) ఆ రెండు సంవత్సరాలూ ఒకే రకమైనవి కావాలి.

(ii) ఆ రెండు సంవత్సరాల్లోని జనవరి 1 ఒకే రోజు కావాలి.

సాధారణ సంవత్సరం, లీపు సంవత్సరాల్లోని మిగులు రోజుల సంఖ్య వరుసగా 1, 2 అని తెలుసు. ఇప్పుడు 2003 సంవత్సరం నుంచి మిగులు రోజులను వరుసగా రాస్తే.....

సంవత్సరం	మిగులు దినాలు
2003	1
2004	2
2005	1
2006	1
2007	1
2008	2
2009	1
2010	1
2011	1
2012	2
2013	1

మొత్తం మిగులు దినాలు = 14

14ని 7తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం = 0. అంటే మొత్తం మిగులు రోజులు = 0.

2013 కంటే ముందు, ఏ సంవత్సరం వరకు కూడా మొత్తం మిగులు రోజుల సంఖ్య సున్నా కాదు.

∴ 2003, జనవరి 1, 2014 జనవరి 1 తేదీల మధ్య ఉండే మిగులు దినాల సంఖ్య = 0.

అంటే ఈ రెండు తేదీలు ఒకే రోజు అవుతాయి.

అలాగే 2003, 2014 రెండూ కూడా సాధారణ సంవత్సరాలే.

∴ 2003 క్యాలెండర్ తిరిగి వెంటనే 2014లో పునరావృతమవుతుంది.

ఇప్పుడు ఇటువంటి లెక్కను పరీక్షలో ఇస్తే, స్టెప్స్ ఎలా రాయాలో చూద్దాం.

ఉదాహరణ 2:

2005 క్యాలెండర్ తిరిగి వెంటనే ఏ సంవత్సరంలో పునరావృతమవుతుంది.

సమాధానం:

సాధారణ సంవత్సరం, లీపు సంవత్సరాల్లోని మిగులు రోజుల సంఖ్య వరుసగా 1, 2 అని మనకు తెలుసు.

ఇప్పుడు 2005 నుంచి వరుసగా మిగులు రోజులను రాస్తే....

సంవత్సరం	మిగులు రోజులు
2005	1
2006	1
2007	1
2008	2(లీపు సంవత్సరం)
2009	1
2010	1

మొత్తం మిగులు రోజులు = 7

= 0

(∵ 7ను 7తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం = 0)

2010 కంటే ముందు ఏ సంవత్సరం వరకు కూడా మిగులు రోజుల సంఖ్య సున్నా కాదు.

∴ 2005, జనవరి 1; 2011, జనవరి 1 తేదీల మధ్య ఉండే మిగులు రోజుల సంఖ్య సున్నా అవుతుంది.
అంటే 01-01-2005, 01-01-2011 తేదీలు ఒకే రోజు వస్తున్నాయి. 2005, 2011 రెండూ కూడా సాధారణ సంవత్సరాలే.

∴ 2005 క్యాలెండర్ తిరిగి వెంటనే 2011లో పునరావృతమవుతుంది.

ఉదాహరణ 3:

ఏదైనా ఒక శతాబ్దపు చివరి రోజు ఏయే వారాలు కావడానికి అవకాశం ఉందో కనుక్కోండి?

సమాధానం:

ఏదైనా ఒక శతాబ్దపు చివరి రోజు అంటే

31-12-100, 31-12-200, 31-12-300 --- మొదలైన తేదీలు అన్నమాట.

01-01-01 నుంచి 31-12-100 వరకు ఉండే కాలవ్యవధి = 100 సంవత్సరాలు.

ఈ 100 సంవత్సరాల్లో 24 లీపు, 76 సాధారణ సంవత్సరాలు ఉంటాయి.

∴ ఈ 100 సంవత్సరాలకు మిగులు దినాలు =

$24 \times 2 + 76 \times 1 = 124 = 5$

(∵ 124ని '7'తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం = 5)

అలాగే 200 సంవత్సరాలు =

100 సంవత్సరాలు + 100 సంవత్సరాలు

మిగులు రోజులు = 5 + 5

= 10

= 3

300 సంవత్సరాలకు మిగులు రోజులు =

5 + 5 + 5

= 15

= 1

400 సంవత్సరాలకు మిగులు రోజులు =

5 + 5 + 5 + 5 + 1

(∵ 400 సంవత్సరం లీపు సంవత్సరం కాబట్టి ఒక మిగులు దినం ఎక్కువ వస్తుంది)

= 21

= 0

400 సంవత్సరాలకు మిగులు రోజులు సున్నా కాబట్టి 500, 600, 700, 800 సంవత్సరాలకు కూడా మిగులు రోజులు వరుసగా 5, 3, 1, 0 అవుతాయి. తర్వాత కూడా ఇవే మిగులు రోజులు పునరావృతమవుతాయి.

కాబట్టి ఏదైనా ఒక శతాబ్దపు చివరి రోజు నాటికి సాధ్యమయ్యే మిగులు రోజులు = '5' లేదా '3' లేదా '1' లేదా '0'.

5, 3, 1, 0 అనేవి శుక్ర, బుధ, సోమ, ఆదివారాల కోడ్‌లు.

∴ ఏదైనా ఒక శతాబ్దపు చివరి రోజు ఆది లేదా సోమ లేదా బుధ లేదా శుక్రవారాలు కావడానికి మాత్రమే అవకాశం ఉంది.

గమనిక:

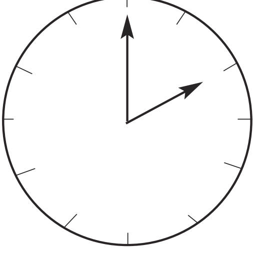
ఇదే విధంగా ఏదైనా ఒక శతాబ్దపు తొలి రోజు సోమ లేదా మంగళ లేదా గురు లేదా శనివారాలు మాత్రమే కావడానికి అవకాశం ఉంది. దీన్ని కూడా పై విధంగానే నిరూపించవచ్చు. శతాబ్దపు తొలిరోజు అంటే 01-01-01, 01-01-101, 01-01-201, 01-01-301 ...... మొదలైన తేదీలు అన్నమాట.

ఉదాహరణ 4:

ఒక ప్రామాణిక గడియారంలో 2, 3 గంటల మధ్య ఏయే సమయాల్లో రెండు ముల్లుల మధ్య $45°$ కోణం ఉంటుంది.

సమాధానం:

2 గంటలప్పుడు గడియారం



ఒక గంట భాగం = $30°$

$\therefore$ రెండు గంటలప్పుడు రెండు ముల్లుల మధ్య కోణం = $2 \times 30° = 60°$

2, 3 గంటల మధ్య రెండు ముల్లుల మధ్య రెండు సందర్భాల్లో $45°$ కోణం ఉంటుంది.

1వ సందర్భం:

నిమిషాల ముల్లు గంటల ముల్లును దాటక ముందు :– రెండు ముల్లుల మధ్య $45°$ కోణం ఉండాలంటే గంటల ముల్లు కంటే నిమిషాల ముల్లు ఎక్కువ చేయాల్సిన కోణం (θ) =

$60 - 45 = 15°$

ఇందుకు పట్టే సమయం,

$T = \frac{2\theta}{11}$ నిమిషాలు

$= \frac{2 \times 15}{11} = \frac{30}{11}$

$= 2\frac{8}{11}$ నిమిషాలు

$\therefore$ 2 గంటల $2\frac{8}{11}$ నిమిషాలప్పుడు రెండు ముల్లుల మధ్య $45°$ కోణం ఉంటుంది.

2వ సందర్భం:

నిమిషాల ముల్లు గంటల ముల్లును దాటిన తర్వాత :– రెండు ముల్లుల మధ్య $45°$ కోణం ఉండాలంటే గంటల ముల్లు కంటే నిమిషాల ముల్లు ఎక్కువ చేయాల్సిన కోణం = $60 + 45$

$= 105°$

ఇందుకు పట్టే సమయం =

$\frac{2\times105}{11}=\frac{210}{11}$

$=19\frac{1}{11}$ నిమిషాలు

$\therefore$ 2 గంటల $19\frac{1}{11}$ నిమిషాలప్పుడు రెండు ముల్లుల మధ్య 45° కోణం ఉంటుంది.

సీటింగ్ అరేంజ్మెంట్

ఏపీపీఎస్సీ నిర్వహించే గ్రూప్-I, మెయిన్స్ ఎగ్జామ్‌లో పేపర్-Vలో సీటింగ్ ఏర్పాట్లు అనే అంశం ఉంది. ఈ అంశంపై మూడు నుంచి ఐదు మార్కుల ప్రశ్నలు వచ్చే అవకాశం ఉంది. అదే విధంగా గ్రూప్-I ప్రిలిమినరీ, గ్రూప్-II పరీక్షల్లో కూడా ఈ అంశం నుంచి ప్రశ్నలు వచ్చే ఆస్కారం ఉంది.

సీటింగ్‌కు సంబంధించిన ప్రశ్నలను సాధించ డానికి ఎలాంటి గణిత పరిజ్ఞానం అవసరం లేదు. మనకుండే సాధారణ అవగాహనతోనే సాధించ వచ్చు. అయితే ఈ ప్రశ్నలను సాధించేటప్పుడు సరైన స్టెప్పులు రాయడానికి ప్రాధాన్యమివ్వాల్సి ఉంటుంది.

సీటింగ్ ఏర్పాట్లను ప్రధానంగా రెండు విధాలుగా విభజించవచ్చు.

1. వరుసలో కూర్చోవడం (Linear)
2. వృత్తాకారంలో కూర్చోవడం (Circular)

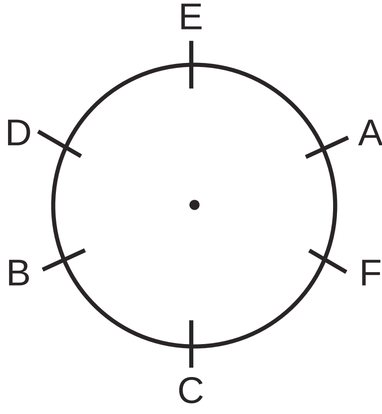
1. కొంతమంది వ్యక్తులు ఒక వరుసలో కూర్చున్నారంటే సాధారణంగా వారందరూ ఉత్తరం వైపునకు ముఖం చేసి కూర్చున్నారని భావిద్దాం. ఉదాహరణకు A, B, C, D, E, F అనే ఆరుగురు వ్యక్తులు ఒక బెంచి మీద కింది విధంగా కూర్చున్నారని అనుకొందాం.

C, D, A, F, B, E

ఇప్పుడు సీటింగ్ ఏర్పాట్లకు సంబంధించిన పదజాలాన్ని గమనిద్దాం. వారందరూ ఉత్తరం వైపు చూస్తున్నారని భావిస్తున్నాం. కాబట్టి కుడి చివర కూర్చున్న వ్యక్తి 'E' అవుతాడు. అలాగే ఎడమ చివర కూర్చున్న వ్యక్తి 'C' అవుతాడు. పొరుగువారు అంటే పక్కన కూర్చున్నవారు...

'A'కి కుడి పక్కన కూర్చున్నవాడు 'F' అవు తాడు. అలాగే 'A'కి కుడివైపున కూర్చున్నవారు.. అంటే 'F', 'B', 'E'లు అవుతారు. అదే విధంగా 'ఎడమ పక్కన', 'ఎడమ వైపున' అనే పదాల మధ్య తేడాను గమనించాలి.

కొంతమంది వ్యక్తులు ఒక వృత్తాకార బల్ల చుట్టూ కూర్చున్నారు.. అంటే సాధారణంగా వారు వృత్త కేంద్రానికి అభిముఖంగా కూర్చున్నారని భావిస్తాం. ఉదాహరణకు A, B, C, D, E, F అనే ఆరుగురు వ్యక్తులు ఒక వృత్తాకార బల్ల చుట్టూ కింది విధంగా కూర్చున్నారనుకొందాం.



ఇక్కడ 'కుడి వైపున', 'కుడి పక్కన' అనే పదాలు ఒకే అర్థంలో వాడుతాం. అంటే 'A'కు కుడివైపు లేదా కుడి పక్కన ఉండే వ్యక్తి 'E' అవుతాడు. 'A'కు కుడి వైపు మూడో స్థానంలో ఉన్న వ్యక్తి.. అంటే 'B' అవుతాడు. అలాగే 'A'కు ఎడమ వైపు రెండో స్థానంలో ఉన్న వ్యక్తి 'C' అవుతాడు.

ఇప్పుడు సీటింగ్ ఏర్పాట్లకు సంబంధించిన కొన్ని సమస్యలను పరిష్కరించి చూద్దాం.

ఉదాహరణ:

ఒక వరుసలోని ఆరుగురు వ్యక్తుల్లో 'D', 'C'లు 'E' సమీప పొరుగువాళ్లు. 'B' 'A'కు మాత్రమే పొరుగు వాడు. 'A' 'F' నుంచి నాల్గోవాడు. అయితే రెండు చివర్లలో ఎవరున్నారు?

(ఏపీపీఎస్సీ, గ్రూప్-I, మోడల్ పేపర్-2007)

సమాధానం:

దత్తాంశం ప్రకారం 'A' 'F' నుంచి నాల్గోవాడు కాబట్టి వాళ్లిద్దరూ కూర్చునే వరుస ఈ కింది విధంగా ఉంటుంది.

<u>F</u>, –, –, –, <u>A</u> లేదా <u>A</u>, –, –, –, <u>F</u>.

'B' 'A'కు మాత్రమే పొరుగువాడు అంటే 'B' ఏదో ఒక చివర 'A' పక్కన కూర్చుంటాడు. అంటే వారు కూర్చునే వరుస

<u>F</u>, –, –, –, <u>A</u>, <u>B</u> లేదా <u>B</u>, <u>A</u>, –, –, –, <u>F</u> అవుతుంది. మధ్యలోని మూడు ఖాళీల్లో C, D, Eలు కూర్చోవాలి. కాబట్టి వీరు ఏ విధంగా కూర్చున్నా రెండు చివర్లలో ఉన్నవారు 'F', 'B'లు అవుతారు.

గమనిక:

అడిగిన ప్రశ్నకు సమాధానం రాబట్టడానికి దత్తాంశంలోని 'D', 'C'లు 'E' పొరుగువాళ్లు అనే అంశంతో పని లేదు. ఈ అంశం సహాయంతో ఆరుగురు వ్యక్తులు ఎన్ని రకాలుగా కూర్చోవచ్చో కనుక్కోవచ్చు. C, D, Eలు కింది విధంగా కూర్చోవచ్చు.

<u>C</u>, <u>E</u>, <u>D</u> లేదా <u>D</u>, <u>E</u>, <u>C</u>

∴ ఆరుగురు వ్యక్తులు ఈ విధంగా కూర్చోవచ్చు.

F, C, E, D, A, B లేదా

F, D, E, C, A, B లేదా

B, A, C, E, D, F లేదా

B, A, D, E, C, F

కాబట్టి పై నాలుగు విధాల్లో ఏ విధంగా కూర్చున్నా రెండు చివర్లలో F, Bలు ఉంటారు.

ఉదాహరణ:

A, B, C, D, E అనే ఐదు మంది బాలురు ఒక బెంచిపై కూర్చున్నారు. 'A' అనే బాలుడు 'C'కి ఎడమవైపు కూర్చున్నాడు. 'D'కి కుడి పక్కన 'B' కూర్చున్నాడు. 'C', 'D'ల మధ్య ఇద్దరు బాలురు కూర్చున్నారు. 'E' అనే బాలుడు కుడి చివరన కూర్చున్నాడు. అయితే మధ్యలో కూర్చున్నదెవరు?

సమాధానం:

దత్తాంశం నుంచి 'D', 'B'లు కూర్చున్న వరుస D, B అవుతుంది.

'C', 'D'ల మధ్య ఇద్దరు బాలురున్నారు. కాబట్టి C, –, –, D, B లేదా D, B, –, C అనే వరుసలో సాధ్యమవుతాయి.

'E' కుడి చివర ఉండాలి కాబట్టి పై రెంటిలో మొదటి వరుస సాధ్యం కాదు. కాబట్టి వారు కూర్చొనే వరుస D, B, –, C, E అవుతుంది. మిగిలిన ఒక్క స్థానంలో 'A' కూర్చుంటాడు.

$\therefore$ వారి వరుస D, B, A, C, E అవుతుంది.

అంటే మధ్యలో కూర్చొనేది 'A' అనే బాలుడు.

ఉదాహరణ:

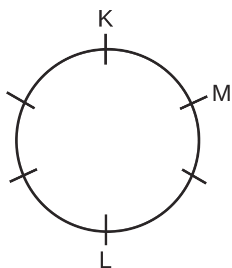
K, L, M, N, O, P అనే ఆరుగురు వ్యక్తులు ఒక వృత్తాకార బల్ల చుట్టూ కూర్చున్నారు.

1. 'K', 'L' ఎదురెదురుగా కూర్చున్నారు
2. 'K'కు ఎడమ వైపు 'M' కూర్చున్నాడు
3. 'O', 'N'లు ఎదురెదురుగా ఉన్నారు
4. 'N'కు కుడిపక్కన 'P' కూర్చున్నాడు

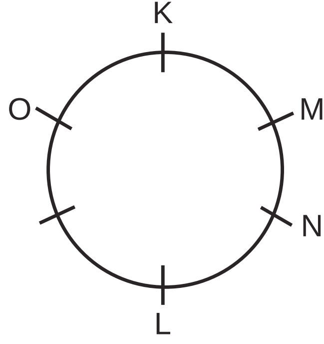
అయితే 'L'కు ఎడమవైపున కూర్చున్నదెవరు?

సమాధానం:

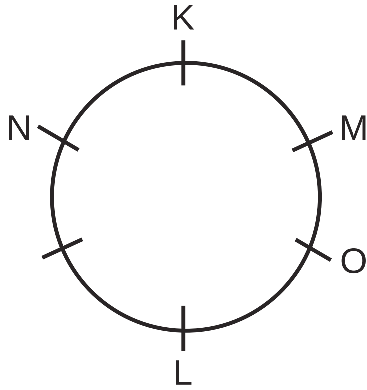
దత్తాంశంలోని 1, 2ల నుంచి K, L, Mలు కూర్చున్న వరుస–



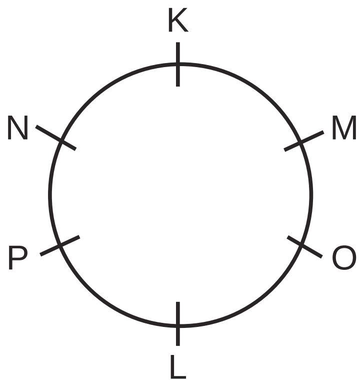
దత్తాంశంలోని 3 నుంచి 'O', 'N'లు ఈ విధంగా కూర్చోవచ్చు.



లేదా



కాని దత్తాంశంలోని 4 నుంచి 'N'కు కుడి పక్కన 'P' కూర్చోవాలి కాబట్టి వారు కూర్చొనే వరుస ఈ విధంగా ఉంటుంది.



∴ 'L'కు ఎడమ వైపు 'P' కూర్చుంటాడు.

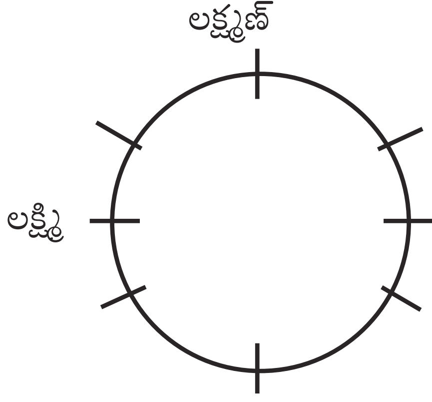
ఉదాహరణ:

లక్ష్మణ్, లాల, లాజర్, లక్ష్మి అనే నలుగురు వైద్యు లు; మురళి, మురారి, ముకుంద్, మమత అనే నలు

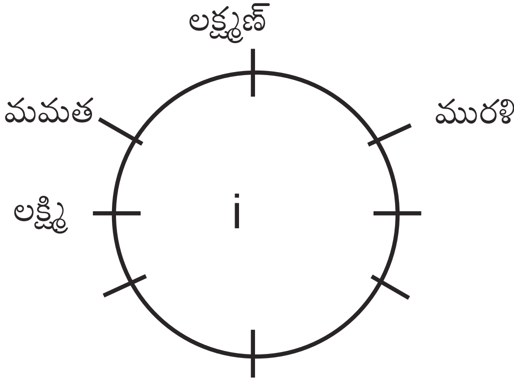
గురు ఇంజనీర్లు ఒక బల్ల చుట్టూ కూర్చున్నా రు. ఏ ఇద్దరు వైద్యులూ ఒకరి పక్కన ఒకరు కూర్చో లేదు. లక్ష్మి, లక్ష్మణ్‌కు రెండు స్థానాలు కుడివైపు, మమతకు పక్కగా కూర్చొంది. మమత మురళికి రెండు స్థానాలు కుడివైపు ఉంది. మురళి లక్ష్మణ్‌కు పక్కన ఉన్నాడు. మురారి మూడు స్థానాలు లాలాకు ఎడమ వైపు ఉంటే, మురారి ఏ ఇద్దరి మధ్య కూర్చొన్నాడు?

సమాధానం:

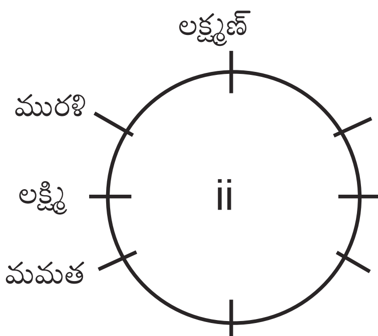
ఏ ఇద్దరు వైద్యులు ఒకరి పక్కన ఒకరు కూర్చోలేదు అంటే డాక్టర్లు, ఇంజనీర్లు ఒకరి తర్వాత ఒకరు కూర్చోవాలి. దత్తాంశం నుంచి లక్ష్మి, లక్ష్మణ్‌లు ఈ విధంగా కూర్చుంటారు.



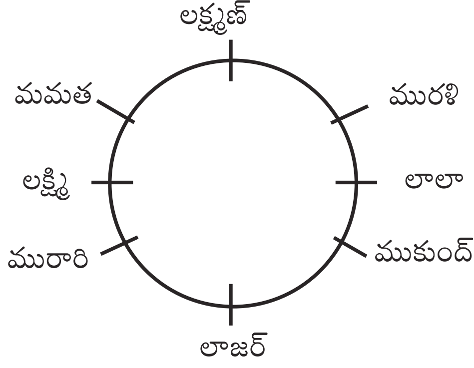
దత్తాంశం నుంచి మమత, మురళిలు కింది రెండు విధాల్లో ఎలాగైనా కూర్చోచ్చు.



లేదా



మురారి మూడు స్థానాలు లాలాకు ఎడమగా ఉండాలంటే పై రెండు ఏర్పాట్లలో (ii)వ ఏర్పాటు సాధ్యం కాదు. కేవలం (i)వ ఏర్పాటు మాత్రమే సాధ్యమవుతుంది. కాబట్టి వారు కూర్చునే వరుస ఈ కింది విధంగా ఉంటుంది.



∴ లక్ష్మి, లాజర్‌ల మధ్య మురారి కూర్చున్నాడు.

గమనిక:

ఈ ప్రశ్న గ్రూప్-I, 2008లో అడిగారు. కానీ పరీక్షలో మమత మురళికి రెండు స్థానాలు ఎడమవైపున ఉంది అని ఇచ్చారు. ఆ విధంగా తీసుకుంటే దత్తాం శం అసంబద్ధం అవుతుంది. కాబట్టి మమత మురళికి రెండు స్థానాలు కుడి వైపున ఉంది అని ప్రశ్నలో మార్పు చేసుకున్నాం.

ఉదాహరణ:

J, K, L, M, N, O, P, Q, R అనే తొమ్మిది మంది వ్యక్తులు ఒక బెంచి మీద కూర్చుని క్రికెట్ మ్యాచ్ చూస్తున్నారు. 'L' అనే వ్యక్తి 'M'కు కుడి పక్కన, 'N'కు కుడివైపున మూడో స్థానంలో కూర్చున్నాడు. 'K' అనే వ్యక్తి ఒక చివర కూర్చున్నాడు. 'O', 'P'ల మధ్య 'Q' కూర్చున్నాడు. 'K'కు ఎడమవైపు మూడో స్థానంలో 'O' కూర్చున్నాడు. 'O'కి కుడి పక్కన 'J' కూర్చున్నాడు. అయితే మధ్యలో కూర్చున్నదెవరు? ఇంకో చివర కూర్చున్నదెవరు?

సమాధానం:

దత్తాంశం నుంచి L, M, Nలు కూర్చున్న వరుస N, –, M, L. అవుతుంది ——— (1)

అలాగే 'O', 'J', 'K'లు కూర్చునే వరుస ఈ విధంగా ఉంటుంది.

J, O, –, –, K.

'O', 'P'ల మధ్య 'Q' కూర్చుంటాడు కాబట్టి వారు కూర్చునే వరుస

J, O, Q, P, K అవుతుంది ——— (2)

(1) & (2)ల నుంచి మిగిలిన ఒక్క ఖాళీ స్థానంలో 'R' ను కూర్చోపెడితే మొత్తం తొమ్మిది మంది కూర్చొనే వరుస కింది విధంగా ఉంటుంది.

N, R, M, L, J, O, Q, P, K.

∴ మధ్యలో కూర్చున్నది 'J', ఇంకొక చివర కూర్చున్నది 'N'.

నంబర్ సిరీస్-1

నంబర్ సిరీస్‌పై పట్టు సాధించాలంటే సంఖ్యలపై ప్రాథమిక పరిజ్ఞానం ఉండాలి. ముందుగా వాటిని చూద్దాం.

సహజ సంఖ్యలు

లెక్కించడానికి ఉపయోగించే సంఖ్యలను సహజ సంఖ్యలు అంటారు. దీనిని 'N'తో సూచిస్తారు.

N = {1, 2, 3, ...}

పూర్ణాంకాలు

సహజ సంఖ్యలతో పాటు సున్నా కూడా కలిసి ఉన్న సంఖ్యలను పూర్ణాంకాలు అంటారు. దీనిని 'W'తో సూచిస్తారు.

W = {0, 1, 2, 3, ...}

పూర్ణసంఖ్యలు

సహజ సంఖ్యలతో పాటు సున్నా, రుణ సంఖ్యలను కలిగి ఉన్న సంఖ్యలను పూర్ణసంఖ్యలు అంటారు. దీనిని 'Z'తో సూచిస్తారు.

Z = {........-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,......}

ప్రధాన సంఖ్యలు

ఏదైనా ఒక సంఖ్యకు 1, అదే సంఖ్య తప్ప ఇతర కారణాంకాలు లేకుంటే వాటిని ప్రధాన సంఖ్యలు అంటారు.

1 ప్రధానసంఖ్య కాదు

2 మొదటి ప్రధాన సంఖ్య

సరిసంఖ్య అయిన ఏకైక ప్రధాన సంఖ్య '2'.

100 లోపు 25 ప్రధాన సంఖ్యలు, 100కు, 200కు మధ్య 20 ప్రధాన సంఖ్యలు ఉన్నాయి.

గ్రూప్ 2 పరీక్ష రాస్తున్న ప్రతి అభ్యర్థి కనీసం వందలోపు ఉన్న ప్రధాన సంఖ్యలను గుర్తించ గలగాలి.

100 లోపు గల ప్రధాన సంఖ్యలు:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

సరి సంఖ్యలు

2తో నిశ్శేషంగా భాగించే సంఖ్య లను సరిసంఖ్యలు అంటా రు.(లేదా)

ఏదైనా ఒక సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానంలో 0, 2, 4, 6, 8లలో ఏదోఒకటి ఉంటే అది సరిసంఖ్య అవుతుంది.

ఉదా: 2, 4, 6, 8, 10, 12,

బేసి సంఖ్యలు

2తో నిశ్శేషంగా భాగించలేని సంఖ్యలను బేసి సంఖ్యలు అంటారు. (లేదా)

ఏదైనా ఒక సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానంలో 1, 3, 5, 7, 9లలో ఏదోఒకటి ఉంటే అది బేసిసంఖ్య అవుతుంది.

ఉదా: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

వర్గ సంఖ్యలు

ఏదైనా ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యతో గుణిస్తే వచ్చే లబ్దాన్ని వర్గసంఖ్య అంటారు. మీరు కనీసం 35 వరకు వర్గాలు నేర్చుకోండి. ఇవి నంబర్ సిరీస్‌తో పాటు నంబర్ ఎనాలజీ, క్లాసిఫికేషన్‌లో కూడా ఉపయోగపడతాయి.

35 వరకు వర్గాలు

1^2 – 1	2^2 – 4	3^2 – 9
4^2 – 16	5^2 – 25	6^2 – 36
7^2 – 49	8^2 – 64	9^2 – 81
10^2 – 100	11^2 – 121	12^2 – 144
13^2 – 169	14^2 – 196	15^2 – 225
16^2 – 256	17^2 – 289	18^2 – 324
19^2 – 361	20^2 – 400	21^2 – 441
22^2 – 484	23^2 – 529	24^2 – 576
25^2 – 625	26^2 – 676	27^2 – 729
28^2 – 784	29^2 – 841	30^2 – 900
31^2 – 961	32^2 – 1024	33^2 – 1089
34^2 – 1156	35^2 – 1225	

ఘన సంఖ్యలు

1 నుంచి 11 వరకు ఘనసంఖ్యలు నేర్చుకుంటే అవి సిరీస్, ఎనాలజీ, క్లాసిఫికేషన్స్‌లలో ఉపయోగపడతాయి.

1^3 – 1 2^3 – 8 3^3 – 27

4^3 – 64 5^3 – 125 6^3 – 216

7^3 – 343 8^3 – 512 9^3 – 729 10^3 – 1000 11^3 – 1331

పైన చెప్పుకున్న ప్రాథమికాంశాలతో పాటు చిన్న చిన్న కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారాలు,

భాగహారాలు వేగంగా చేయగలిగితే నంబర్ సిరీస్‌ను సులభంగా చేయగలుగుతారు.

నంబర్ సిరీస్‌లో సంఖ్యలు స్వల్పంగా పెరుగుతున్నట్లయితే అందులో సంకలన సంబంధం; సంఖ్యలు వేగంగా పెరుగుతున్నట్లయితే అందులో గుణకార సంబంధం; సంఖ్యలు స్వల్పంగా తగ్గుతున్నట్లయితే వ్యవకలన సంబంధం; వేగంగా తగ్గుతున్నట్లయితే అందులో భాగాహార సంబంధం ఉందని గుర్తించాలి.

నంబర్ సిరీస్ అనే అంశంపై వివిధ కాంపిటీటివ్ పరీక్షల్లో వచ్చిన సమస్యల ఆధారంగా కింది విధంగా వర్గీకరించవచ్చు.

1. సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం స్థిరంగా ఉండటం

సిరీస్ క్రమంగా పెరుగుతుంది. అందులో ఏ రెండు సంఖ్యల మధ్య వ్యత్యాసం అయినా సమానంగా ఉంటుంది. ఆ స్థిర వ్యత్యాసాన్ని గుర్తించి చివరి సంఖ్యకు కలిపితే మనకు కావాల్సిన సమాధానం వస్తుంది.

ఉదాహరణలు

1. 3, 7, 11, 15, 19, 23, ...

ఈ సిరీస్ క్రమంగా పెరిగింది. వ్యత్యాసం స్థిరంగా ఉంది. ఏ రెండు సంఖ్యల మధ్య వ్యత్యాసం చూసినా అది '4'కు సమానం అయింది. కాబట్టి చివరి సంఖ్య '23'కు '4' కలపాలి.

$23 + 4 = 27$

∴ 27 సమాధానం అవుతుంది.

2. 6, 13. 20, 27, 34, 41, 48, ...

సిరీస్ స్థిరంగా '7' చొప్పున పెరుగుతుంది. కాబట్టి చివరి సంఖ్య '48'కి '7' కలపాలి.

$48 + 7 = 55$

∴ 55 సమాధానం అవుతుంది.

3. 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, ...

సిరీస్ స్థిరంగా 3 చొప్పున పెరుగుతుంది. కాబట్టి చివరి సంఖ్య 34కి 3 కలపాలి.

$34 + 3 = 37$

∴ 37 సమాధానం అవుతుంది.

4. 49, 55, 61, 67, 73, ...

సిరీస్ స్థిరంగా 6 చొప్పున పెరుగుతుంది. కాబట్టి చివరి సంఖ్య 73కు 6 కలపాలి.

73 + 6 = 79

∴ 79 సమాధానం అవుతుంది.

2. సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం క్రమంగా పెరగడం

సిరీస్ క్రమంగా పెరుగుతుంది. దీనితో పాటు వ్యత్యాసం కూడా క్రమంగా పెరుగుతుంది. ఈ వ్యత్యాసం ఏ స్థాయిలో, ఏ విధంగా పెరుగుతుందో తెలుసుకొని ఆ తర్వాత సంఖ్యను చివరి సంఖ్యకు కలపాలి.

ఉదాహరణలు

5. 2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, ...

ఈ సిరీస్‌లో సంఖ్యల మధ్య వ్యత్యాసం క్రమంగా 1, 2, 3, 4, 5, 6 చొప్పున పెరిగింది. తర్వాత 7 పెరగాలి. కాబట్టి చివరి సంఖ్య '23'కు '7' కలపాలి.

23 + 7 = 30

∴ సమాధానం 30

6. 5, 7, 11, 17, 25, 35, 47, ...

ఈ సిరీస్‌లో సంఖ్యల మధ్య వ్యత్యాసం క్రమంగా 2, 4, 6, 8, 10, 12 చొప్పున పెరిగింది. తర్వాత 14 పెరగాలి. కాబట్టి చివరి సంఖ్య '47'కు '14' కలపాలి.

47 + 14 = 61

∴ సమాధానం 61

7. 9, 13, 21, 33, 49,........

ఈ సిరీస్‌లో సంఖ్యల మధ్య వ్యత్యాసం క్రమంగా 4, 8, 12, 16 చొప్పున పెరిగింది. ఇవి '4' గుణిజాలు. తర్వాత 20 పెరగాలి. చివరి సంఖ్య '49'కి '20' కలపాలి.

49 + 20 = 69

∴ సమాధానం 69

8. 4, 6, 9, 14, 21, ...

ఈ సిరీస్‌లో సంఖ్యల మధ్య వ్యత్యాసం క్రమంగా 2, 3, 5, 7 చొప్పున పెరిగింది. ఇవి బేసి సంఖ్యల సిరీస్ అని పొరపడతారు. కానీ ఇవి ప్రధాన సంఖ్యలు. కాబట్టి తర్వాత 11 పెరగాలి. చివరి సంఖ్య '21'కు '11' కలపాలి.

21 + 11 = 32

∴ సమాధానం 32

3. సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం క్రమంగా తగ్గడం

సిరీస్ క్రమంగా పెరుగుతుంది. కానీ వాటి మధ్య వ్యత్యాసం క్రమంగా తగ్గుతుంది. ఈ వ్యత్యాసం ఏ స్థాయిలో, ఏ విధంగా తగ్గుతుందో తెలుసుకొని, ఆ తర్వాత సంఖ్యను చివరి సంఖ్యకు కలపాలి.

ఉదాహరణలు

9. 12, 22, 30, 36, 40, ...

సిరీస్ క్రమంగా పెరిగింది. కానీ వాటి మధ్య వ్యత్యాసం క్రమంగా 10, 8, 6, 4 చొప్పున తగ్గింది. ఆ తర్వాత '2' రావాలి. కాబట్టి చివరి సంఖ్యకు '2' కలపాలి.

40 + 2 = 42

∴ సమాధానం 42

10. 16, 41, 61, 76, 86, ...

సిరీస్ క్రమంగా పెరిగింది. కానీ వాటి మధ్య వ్యత్యాసం క్రమంగా 25, 20, 15, 10 చొప్పున తగ్గింది. ఆ తర్వాత '5' రావాలి. కాబట్టి చివరి సంఖ్యకు '5' కలపాలి.

86 + 5 = 91

∴ సమాధానం 91

11. 12, 23, 30, 35, 38, ...

సిరీస్ క్రమంగా పెరిగింది. కానీ వాటి మధ్య వ్యత్యాసం క్రమంగా 11, 7, 5, 3 చొప్పున తగ్గింది. ఇవి ప్రధాన సంఖ్యలు. 3 కన్నా చిన్న ప్రధానసంఖ్య '2'. కాబట్టి చివరి సంఖ్య '38'కు '2' కలపాలి.

38 + 2 = 40

∴ సమాధానం 40

నెంబర్ సీరిస్-2

ఇప్పటివరకు నెంబర్ సీరిస్‌లో కొన్ని ఉదాహరణలు గమనించాం. ఇప్పుడు మరికొన్నింటిని చూద్దాం.

సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం, వ్యత్యాసం స్థిరంగా ఉండడం

1. 93, 89, 85, 81, 77, ..., ...

ఈ సిరీస్ ఒక స్థిర సంఖ్య '4' చొప్పున తగ్గుతోంది. అంటే తర్వాత సంఖ్యలు కూడా '4' చొప్పున తగ్గాలి.

77 – 4 = 73

73 – 4 = 69

∴ సమాధానం: 73, 69

2. 42, 39, 36, 33, 30, ...

ఈ సిరీస్‌లో ప్రతి సంఖ్య దాని ముందు సంఖ్య కంటే '3' తగ్గుతూ ఉంది. 30 – 3 = 27

∴ సమాధానం: 27

సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం, వ్యత్యాసం క్రమంగా పెరగడం

3. 99, 98, 96, 93, 89, 84, ...

ఈ సిరీస్ క్రమంగా తగ్గుతుంది. కానీ వ్యత్యా సం క్రమంగా 1,2,3,4,5 చొప్పున పెరిగింది. అంటే తర్వాత సంఖ్య తెలుసుకోవాలంటే.. 84 నుంచి '6' తీసివేయాలి.

84 – 6 = 78

∴ సమాధానం: 78

4. 111, 109, 106, 101, 94, ...

ఈ సిరీస్ క్రమంగా తగ్గుతుంది. కాని వ్యత్యా సం క్రమంగా 2, 3, 5, 7 చొప్పున పెరిగింది. 2, 3, 5, 7 అనేవి ప్రధాన సంఖ్యలు. తర్వాత ప్రధాన సంఖ్య 11. కాబట్టి '94' నుంచి '11'ను తీసివేస్తే సరైన సమాధానం వస్తుంది.

94 – 11 = 83

∴ సమాధానం: 83

సిరీస్, వ్యత్యాసం క్రమంగా తగ్గడం..

5. 77, 67, 59, 53, 49, ...

సిరీస్ క్రమంగా తగ్గుతోంది. వ్యత్యాసం కూడా క్రమంగా 10, 8, 6, 4 చొప్పున తగ్గుతోంది. తర్వాత '2' తగ్గాలి.

49 – 2 = 47

∴ సమాధానం: 47

6. 49, 40, 33, 28, 25, ...

సిరీస్ క్రమంగా తగ్గింది. వ్యత్యాసం కూడా క్రమంగా 9, 7, 5, 3 చొప్పున తగ్గాయి. ఆ తర్వాత '1' తగ్గాలి.

25 – 1 = 24

∴ సమాధానం: 24

సిరీస్ గుణకార సంబంధంతో పెరగడం

7. 2, 4, 12, 48, 240, ...

ఈ సిరీస్‌లో ప్రతి సంఖ్య దాని ముందు సం ఖ్యతో క్రమంగా పెరుగుతూ ఉన్న సంబంధా న్ని కలిగి ఉంది. ఈ సిరీస్‌లో సమాధానాన్ని రాబట్టాలంటే.. సమాధాన సంఖ్య స్థానంతో ముందు సంఖ్యను గుణించాలి. ఇక్కడ సమా.ధాన సంఖ్య స్థానం 6. దాని ముందు సంఖ్య 240. ఈ రెండింటిని గుణిస్తే వచ్చే సంఖ్యే సమాధానం.

$240 \times \underline{6} = 1440$

∴ సిరీస్‌లో తర్వాత వచ్చే సంఖ్య 1440.

8. 2, 3, 8, 27, 112,565,...

ఈ సిరీస్‌లో కూడా గుణకా ర సంబంధం ఉందని తె లుస్తోంది. కానీ మొదటి సంఖ్య '2'ను '1'తో కానీ '2'తో కానీ గుణించినప్పటికీ దాని పక్కనున్న '3' తో సరిపోవ డం లేదు. ఈ సిరీస్ గుణకారంతో పాటు సంకలన (కూడిక) సంబంధం కూడా ఉంది. పై సిరీస్‌ను కింది విధంగా విశ్లేషించవచ్చు.

$2 \times 1 + 1 = 3$

$3 \times 2 + 2 = 8$

$8 \times 3 + 3 = 27$

$27 \times 4 + 4 = 112$

$112 \times 5 + 5 = 565$

అంటే ప్రతి సంఖ్యను వరుసగా 1, 2, 3, 4, 5లచే గుణించి, అదే సంఖ్యను కలపడం వల్ల తర్వాత సంఖ్య వస్తుంది. అంటే తర్వాత 565ను '6'తో గుణించి '6' కలపాలి.

$565 \times 6 + 6 = 3396$

∴ సిరీస్‌లో తర్వాత వచ్చే సంఖ్య 3396.

ఆల్టర్‌నేటివ్ సిరీస్

9. 2, 3, 4, 6, 6, 9, 8, 12, 10, 15, ...

దీనిలో రెండు సిరీస్‌లు మిళితమై ఉన్నాయి. ఆ రెండు సిరీస్‌లను పరిశీలిస్తే..

i) 2, 4, 6, 8, 10, ...

ii) 3, 6, 9, 12, 15, ...

సమస్యలో 15 తర్వాత, మొదటి సిరీస్‌లోని సంఖ్య రావాలి. మొదటి సిరీస్ 2, 4, 6, 8, 10 తర్వాత రావాల్సిన సంఖ్య 12.

∴ సమాధానం: 12

10. 4, 7, 6, 10, 8, 13, 10, 16, ...

పై సిరీస్‌లో రెండు సిరీస్‌లలోని సంఖ్యలు ఒక దాని తర్వాత ఒకటి వచ్చాయి. i) 4, 6, 8, 10, ...

ii) 7, 10, 13, 16, ...

సమస్యలో 16 తర్వాత, మొదటి సిరీస్‌లోని సంఖ్య రావాలి. మొదటి సిరీస్ 4, 6, 8, 10 తర్వాత రావాల్సిన సంఖ్య 12.

∴ సమాధానం: 12

11. 20, 22, 22, 20, 24, 18,26,....

పై సిరీస్‌లో రెండు సిరీస్‌లలోని సంఖ్యలు ఒక దాని తర్వాత ఒకటి వచ్చాయి.

i) 20, 22, 24, 26, ...

ii) 22, 20,18, ...

పై సమస్యలో 26 తర్వాత రెండో సిరీస్‌లోని సంఖ్య రావాలి. రెండో సిరీస్ 22, 20, 18 తర్వాత రావాల్సిన సంఖ్య 16.

∴ సమాధానం : 16

గ్రూప్ సిరీస్..

12. 6, 8, 14, 7, 10, 17, 8, 13, ...

పై సిరీస్‌లో ప్రతి మూడు నంబర్లు ఒక గ్రూప్ గా ఉన్నాయి. ప్రతి మూడో సంఖ్య దాని ముం దు రెండు సంఖ్యల మొత్తానికి సమానం.

6 + 8 = 14

7 + 10 = 17

అదే విధంగా

$8 + 13 = 21$

∴ సమాధానం: 21

13. 20, 10, 200, 10, 5, 50, 5, 6, ...

పై సిరీస్‌లో ప్రతి మూడు నంబర్లు ఒక గ్రూప్ గా ఉన్నాయి. ప్రతి మూడో సంఖ్య దాని ముం దున్న రెండు సంఖ్యల లబ్ధానికి సమానం.

$20 \times 10 = 200$

$10 \times 5 = 50$

అదే విధంగా

$5 \times 6 = 30$

∴ సమాధానం: 30

కొన్ని సంఖ్యలు మినహా..

14. 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

ఈ సిరీస్‌లో మొదటి రెండు సంఖ్యలు మినహా మిగతా సంఖ్యలన్నీ దానికంటే ముందున్న రెండు సంఖ్యల మొత్తానికి సమానం.

$2 + 3 = 5$; $3 + 5 = 8$;

$5 + 8 = 13$; $13 + 21 = 34$;

$21 + 34 = 55$

∴ సమాధానం: 55.

15. 1, 2, 2, 4, 8, 32, ...

పై సిరీస్‌లో మొదటి రెండు సంఖ్యలు మినహా, మిగతా సంఖ్యలు.. దానికంటే ముందున్న రెండు సంఖ్యలను గుణించడం వల్ల వస్తున్నాయి.

$1 \times 2 = 2$; $2 \times 2 = 4$;

$2 \times 4 = 8$; $4 \times 8 = 32$

అదే విధంగా

$8 \times 32 = 256$

∴ సమాధానం: 256

చిట్కా

ఏ సంఖ్యనైనా 5చే గుణించాలంటే, ఆ సంఖ్య చివర ఒక సున్నా ఉన్నట్లు ఊహించుకొని, ఆ సంఖ్యను 2 చేత భాగించాలి. వచ్చే భాగ ఫలమే వాటి లబ్ధం అవుతుంది.

ఉదాహరణ

5637×5 చేయాలంటే 5637 చివర సున్నా ఉందనుకొని దానిని '2'చే భాగించాలి.

$\frac{56370}{2} = 28185$

$\therefore 5637 \times 5 = 28185$

నంబర్ సిరీస్-3

అత్యంత ప్రాముఖ్యం ఉన్న ఈ నంబర్ సిరీస్ ప్రశ్నలను సరళంగా సాధించాలంటే వేగంగా కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకార, భాగహారా లపై పట్టుసాధించాలి. వీటితో పాటు 1 నుంచి 11 వరకు ఘనాలు; 1 నుంచి 35 వరకు వర్గాలు కచ్చితంగా వచ్చి ఉండాలి. వీటితో పాటు వంద వరకు ఉన్న ప్రధానసంఖ్యలను గుర్తించగలిగితే చాలు.

నంబర్ సిరీస్‌ను సులభంగా అర్థం చేసు కోవడానికి గత ప్రశ్నాపత్రాలను పరిశీలించాలి. నంబర్ సిరీస్‌లో వచ్చే ప్రశ్నలు కింది విధంగా ఉంటున్నాయి.

1. సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం
2. సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం
3. సిరీస్ వేగంగా పెరగడం
4. సిరీస్ వేగంగా తగ్గడం
5. ఆల్టర్‌నేటివ్ సిరీస్
6. గ్రూప్ సిరీస్
7. ఇతర ప్రశ్నలు

మోడల్ 1 – సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం

సంఖ్యలు క్రమంగా పెరుగుతూ, వీటి వ్యత్యా సంలో పెద్దగా మార్పు లేనట్లయితే ఈ సిరీస్‌లో సంకలన సంబంధం ఉందని చెప్పవచ్చు. సిరీస్‌లోని సంఖ్యల వ్యత్యాసం ఆధారంగా దీనిని మూడు ఉప విభాగాలుగా వర్గీకరించ వచ్చు. అవి..

1ఎ. సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం స్థిరంగా ఉండడం

1బి. సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం క్రమంగా పెరగడం

1సి. సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం క్రమంగా తగ్గడం

1ఎ. సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం స్థిరంగా ఉండడం

సిరీస్ ఏ రెండు సంఖ్యల మధ్య వ్యత్యాసం చూసినా అది స్థిరంగా ఉంటుంది. అంటే ఒక స్థిరసంఖ్య చొప్పున సిరీస్ పెరు గుతుంది. కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీ లిద్దాం.

1. 9, 13, 17, 21, 25, 29, ...

ఈ సిరీస్ క్రమంగా పెరుగుతుంది. వ్యత్యాసం స్థిరంగా ఉంది. ఏ రెండు సంఖ్యల వ్యత్యాసం అయినా 4. అంటే చివరి సంఖ్య 29కి 4 కలిపితే తర్వాత సంఖ్య వస్తుంది.

29 + 4 = 33

సమాధానం 33.

2. 12, 19, 26, 33, ...

సిరీస్ క్రమంగా '7' చొప్పున పెరుగు తుంది. వ్యత్యాసం స్థిరంగా ఉంది.

కావాల్సిన సంఖ్య = 33 + 7 = 40

సమాధానం 40.

3. 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...

సిరీస్ క్రమంగా '3' చొప్పున పెరుగు తుంది. వ్యత్యాసం స్థిరంగా ఉంది.

కావాల్సిన సంఖ్య = 20 + 3 = 23

సమాధానం 23.

4. 21, 27, 33, 39, 45, ...

సిరీస్ క్రమంగా '6' చొప్పున పెరుగు తుంది. వ్యత్యాసం స్థిరంగా ఉంది.

కావాల్సిన సంఖ్య 45 + 6 = 51

సమాధానం 51.

1బి. సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం క్రమంగా పెరగడం.

5. 2, 3, 5, 8, 12, 17, ...

1 2 3 4 5

సిరీస్ క్రమంగా పెరుగుతుంది. వ్యత్యాసం కూడా 1, 2, 3, 4, 5 చొప్పున పెరుగుతుంది. ఆ తర్వాత 6 పెరగాలి.

∴ కావాల్సిన సంఖ్య = 17 + 6 = 23

సమాధానం 23.

6. 2,10, 14,20,28, ...

2 4 6 8

సిరీస్ క్రమంగా పెరుగుతుంది. వ్యత్యాసం కూడా 2, 4, 6, 8 చొప్పున పెరుగుతుంది. ఆ తర్వాత 10 పెరగాలి.

∴ కావాల్సిన సంఖ్య = 28 + 10 = 38

సమాధానం 38.

7. 10, 12, 15, 20, 27, ...

2 3 5 7

సిరీస్ క్రమంగా పెరుగుతుంది. వ్యత్యాసం కూడా 2, 3, 5, 7 చొప్పున పెరుగుతుంది. సాధారణంగా 2, 3, 5, 7 అనేవి బేసి సంఖ్యలని పొరపడి 27కు '9' కలిపి '36' అని సమాధానం గుర్తిస్తారు. ఇది తప్పు. 2, 3, 5, 7 లలో '2' అనేది బేసి సంఖ్య కాదు. నిశితంగా పరిశీలిస్తే ఇవి ప్రధాన సంఖ్యలని తెలుస్తుంది. '7' తర్వాత ప్రధాన సంఖ్య 11. కాబట్టి చివరి సంఖ్యకు 11 కలపాలి.

∴ కావాల్సిన సంఖ్య = 27 + 11 = 38

సమాధానం 38.

8. 5, 8, 14, 23, 35,...

3 6 9 12

సిరీస్ క్రమంగా పెరుగుతుంది. వ్యత్యాసం కూడా 3, 6, 9, 12 (3 గుణిజాలు) చొప్పున పెరుగుతుంది. ఆ తర్వాత 15 పెరగాలి.

∴ కావాల్సిన సంఖ్య = 35 + 15 = 50

సమాధానం 50.

1సి. సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం క్రమంగా తగ్గడం

9. 5, 15, 24, 32, 39, ...

10 9 8 7

సిరీస్ క్రమంగా పెరుగుతుంది. కాని వ్యత్యాసం క్రమంగా 10, 9, 8, 7ల చొప్పున తగ్గుతుంది. ఆ తర్వాత 6 రావాలి.

∴ కావాల్సిన సంఖ్య = 39 + 6 = 45

సమాధానం 45.

10. 12, 22, 30, 36, 40, ...

10 8 6 4

సిరీస్ క్రమంగా పెరుగుతుంది. కానీ వ్యత్యాసం క్రమంగా తగ్గుతుంది. 10, 8, 6, 4ల తర్వాత 2

రావాలి.

∴ కావాల్సిన సంఖ్య = 40 + 2 = 42

సమాధానం 42.

11. 6, 22, 34, 42, ...

16 12 8

సిరీస్ క్రమంగా పెరుగుతుంది. కానీ వ్యత్యాసం క్రమంగా 16, 12, 8 చొప్పున తగ్గుతుంది. తర్వాత 4 రావాలి.

∴ కావాల్సిన సంఖ్య = 42 + 4 = 46

సమాధానం 46.

12. 30, 47, 60, 71, ...

17 13 11

సిరీస్ క్రమంగా పెరుగుతుంది. వ్యత్యాసం క్రమంగా 17, 13, 11 చొప్పున తగ్గ తుంది. 17, 13, 11లు ప్రధాన సంఖ్యలు. తర్వాత వచ్చే ప్రధాన సంఖ్య 7.

∴ కావాల్సిన సంఖ్య = 71 + 7 = 78

సమాధానం 78.

నేటి చిట్కా

ఏదైనా ఒక సంఖ్యను '5'తో గుణించాల్సి వస్తే, గుణించాల్సిన సంఖ్య చివర సున్నా పెట్టి '2'తో భాగించండి. ఏ సంఖ్యనైనా '5'తో గుణించడం కంటే 2తో భాగించడం చాలా సులభం.

ఉదాహరణలు

1. 6785×5

ఇందులో 6785 చివర సున్నా పెట్టి '2'తో భాగించాలి.

$$\frac{67850}{2} = 33925$$

$\therefore 6785 \times 5 = 33925$

2. 69548×5

69548 చివర సున్నా పెట్టి '2'తో భాగించాలి.

$$\frac{695480}{2} = 347740$$

$\therefore\ 69548 \times 5 = 347740$

గమనిక

గుణించాల్సిన సంఖ్య చివర సున్నా పెడుతు న్నామంటే, దానిని మనం '10'తో గుణించి నట్లు. ఆపై '2'తో భాగిస్తున్నాం. $\frac{10}{2} = 5$ కాబట్టి 5తో గుణిస్తే ఏ సమాధానం వస్తుందో 10తో గుణించి, 2తో భాగించినా అదే సమాధానం వస్తుంది.

నంబర్ సిరీస్-4

దాదాపు అన్ని జనరల్ స్టడీస్ పేపర్లలో తనకంటూ ఒక స్థానం సంపాదించి, దానిని నిలుపుకుంటున్న అంశం నంబర్ సిరీస్. క్రితంసారి నంబర్ సిరీస్ నుంచి ప్రశ్నలు 7 మోడల్స్‌లో వస్తాయని తెలుసుకున్నాం. మొదటి మోడల్ సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం గురించి చర్చించాం. ఇప్పుడు మిగతా మోడల్స్‌ను పరిశీలిద్దాం.

సంఖ్యల వరుసక్రమం

మోడల్ 2 సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం

సిరీస్ క్రమంగా తగ్గుతూ, ఆ సంఖ్యల మధ్య వ్యత్యాసంలో పెద్ద మార్పు లేనట్లయితే ఈ సిరీస్‌లో వ్యవకలన సంబంధం ఉందని చెప్పొచ్చు. సిరీస్ లోని సంఖ్యల వ్యత్యాసం ఆధారంగా దీనిని మూడు ఉప విభాగాలుగా వర్గీకరించవచ్చు. అవి..

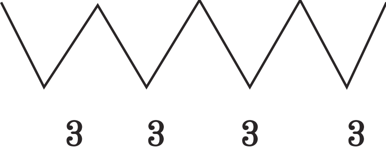
2ఎ. సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం, వ్యత్యాసం స్థిరంగా ఉండడం

2బి. సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం, వ్యత్యాసం క్రమంగా పెరగడం

2సి. సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం, వ్యత్యాసం క్రమంగా తగ్గడం

2ఎ. సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం, వ్యత్యాసం స్థిరంగా ఉండడం

13. 64, 61, 58, 55, 52, ...



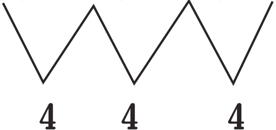
3 3 3 3

సిరీస్ క్రమంగా తగ్గుతుంది. వ్యత్యాసం స్థిరంగా(3) ఉంది. తర్వాత 3 తగ్గాలి.

కావాల్సిన సంఖ్య = 52 – 3 = 49

సమాధానం: 43

14. 59, 55, 51, 47, ...



4 4 4

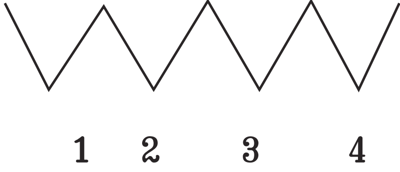
సిరీస్ క్రమంగా తగ్గుతుంది. వ్యత్యాసం స్థిరంగా (4) ఉంది. తర్వాత 4 తగ్గాలి.

కావాల్సిన సంఖ్య = 47 – 4 = 43

సమాధానం: 43

2బి. సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం, వ్యత్యాసం క్రమంగా పెరగడం

15. 91, 90, 88, 85, 81, ...

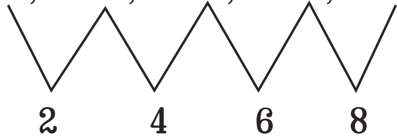


సిరీస్ క్రమంగా తగ్గుతుంది. కాని వ్యత్యాసం క్రమంగా 1, 2, 3, 4 చొప్పున పెరుగుతుంది. తర్వాత 5 రావాలి.

కావాల్సిన సంఖ్య = 81 – 5 = 76

సమాధానం: 76

16. 100, 98, 94, 88, 80, ...



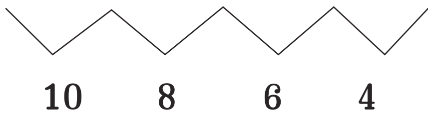
సిరీస్ క్రమంగా తగ్గుతుంది. కాని వ్యత్యాసం క్రమంగా 2, 4, 6, 8 చొప్పున పెరుగుతుంది. తర్వాత 10 రావాలి.

కావాల్సిన సంఖ్య = 80 – 10 = 70

సమాధానం: 70

2సి. సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం, వ్యత్యాసం క్రమంగా తగ్గడం

17. 90, 80, 72, 66, 62, ...

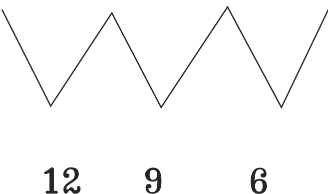


సిరీస్ క్రమంగా తగ్గుతుంది. వ్యత్యాసం కూడా క్రమంగా 10, 8, 6, 4 చొప్పున తగ్గుతుంది. తర్వాత 2 రావాలి.

కావాల్సిన సంఖ్య = 62 – 2 = 60

సమాధానం: 60

18. 80, 68, 59, 53, ...



సిరీస్ క్రమంగా తగ్గుతుంది. వ్యత్యాసం కూడా క్రమంగా 12, 9, 6 (3 గుణిజాలు) చొప్పున

తగ్గుతుంది. తర్వాత 3 రావాలి.

కావాల్సిన సంఖ్య = 53 – 3 = 50

సమాధానం: 50

మోడల్ 3 సిరీస్ వేగంగా పెరగడం

సిరీస్‌లో సంఖ్యలు వేగంగా పెరుగుతాయి. మొదటి రెండు సంఖ్యల మధ్య వ్యత్యాసం, చివరి రెండు సంఖ్యల మధ్య వ్యత్యాసంలో చాలా తేడా ఉంటుంది. ఈ విభాగంలో ప్రశ్నలను ఐదు ఉప విభాగాలుగా వర్గీకరించవచ్చు. అవి..

3ఎ. సిరీస్ వేగంగా పెరగడం, గుణకార సంబంధం

3బి. సిరీస్ వేగంగా పెరగడం, గుణకార సంకలన సంబంధం

3సి. సిరీస్ వేగంగా పెరగడం, గుణకార వ్యవకలన సంబంధం

3డి. సిరీస్ వేగంగా పెరగడం, వర్గ సంబంధం

3ఇ. సిరీస్ వేగంగా పెరగడం, ఘన సంబంధం

3ఎ. సిరీస్ వేగంగా పెరగడం, గుణకార సంబంధం

19. 2, 4, 12, 48, 240, ...



×2 ×3 ×4 ×5

సిరీస్ వేగంగా పెరుగుతుంది. వ్యత్యాసంలో చాలా తేడా ఉంది. కాబట్టి ఇందులో గుణకార సంబంధం ఉందని చెప్పొచ్చు.

సిరీస్‌లోని సంఖ్యలను వరుసగా 2, 3, 4, 5లతో గుణిస్తే తర్వాత సంఖ్యలు వచ్చాయి. కాబట్టి 240ని 6తో గుణించాలి.

$240 \times 6 = 1440$

సమాధానం: 1440

20. 1, 1, 3, 15, 105, ...



×1 ×3 ×5 ×7

సిరీస్‌లోని సంఖ్యలను వరుసగా 1, 3, 5, 7 అనే బేసి సంఖ్యలతో గుణించారు. 105ను తర్వాత బేసి సంఖ్య ‘9’తో గుణించాలి.

$105 \times 9 = 945$

సమాధానం: 945

3బి. సిరీస్ వేగంగా పెరగడం, గుణకార సంకలనం సంబంధం

21. **1, 2, 5, 16, 65, ...**

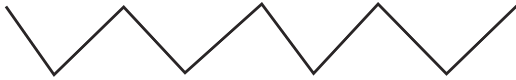
×1+1 ×2+1 ×3+1 ×4+1

సిరీస్‌లోని సంఖ్యలను వరుసగా 1, 2, 3, 4లతో గుణించి ఒకటి కలిపితే తర్వాత సంఖ్య వస్తుంది. అదేవిధంగా చివరి సంఖ్య 65ను 5తో గుణించి 1 కలపాలి.

కావాల్సిన సంఖ్య = $65 \times 5 + 1 = 326$

సమాధానం: 326

22. **2, 6, 28, 174, 1400, ...**



×2+2 ×4+4 ×6+6 ×8+8

సిరీస్‌లోని సంఖ్యలను వరుసగా 2, 4, 6, 8 అనే సరిసంఖ్యలతో గుణించి, ఆ లబ్ధానికి అవే సరిసంఖ్యలు కలిపారు. అదేవిధంగా 1400ను 10తో గుణించి, 10 కలపాలి.

కావాల్సిన సంఖ్య = $1400 \times 10 + 10$

$= 14010$

సమాధానం: 14010

3సి. సిరీస్ వేగంగా పెరగడం, గుణకార వ్యవకలన సంబంధం

23. **2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, ...**

సిరీస్‌లోని సంఖ్యలను 2తో గుణించి, 1 తీసివేస్తే తర్వాత సంఖ్య వస్తుంది. అదేవిధంగా 65ను 2తో గుణించి, ఒకటి తీసివేయాలి.

కావాల్సిన సంఖ్య $65 \times 2 - 1 = 129$

సమాధానం: 129

24. **2, 5, 24, 167, ...**



×3–1 ×5–1 ×7–1

సిరీస్‌లోని సంఖ్యలను వరుసగా బేసి సంఖ్యలతో గుణించి, 1 తీసివేశారు. అదేవిధంగా చివరి సంఖ్య 167ను 9తో గుణించి 1 తీసివేయాలి.

కావాల్సిన సంఖ్య = $167 \times 9 - 1 = 1502$

సమాధానం: 1502

ఇదే ప్రశ్నకు మరో సమాధానం కూడా ఉంది. సిరీస్‌లోని సంఖ్యలను వరుసగా 3, 5, 7లతో గుణించి, ఒకటి తీసివేశాం. 3, 5, 7 అనేవి కేవలం బేసిసంఖ్యలు మాత్రమే కాదు. ఇవి ప్రధానసంఖ్యలు కూడా అవుతాయి. తర్వాత ప్రధానసంఖ్య 11. కాబట్టి 167ను 11తో గుణించి, ఒకటి తీసివేయాలి.

కావాల్సిన సంఖ్య $= 167 \times 11 - 1 = 1836$

సమాధానం: 1836

పై రెండు సమాధానాల్లో ఏదో ఒకటి ఆప్షన్‌లలో ఉండొచ్చు. ఒకవేళ రెండు సమాధానాలు ఉంటే 'పై రెండు సరైనవే' అనే మరో ఆప్షన్ ఉంటుంది.

3డి. సిరీస్ వేగంగా పెరగడం, వర్గ సంబంధం

25. 4, 16, 36, 64, 100, ...

ఇవి వరుసగా సరిసంఖ్యల వర్గాలు. 2, 4, 6, 8, 10 తర్వాత 12 వర్గం రావాలి.

సమాధానం: $12^2 = 144$

26. 12, 20, 30, 42, 56, ...

వరుసగా 3, 4, 5, 6, 7ల వర్గ సంఖ్యలకు అవే సంఖ్యలు కలిపారు. తర్వాత 8 వర్గానికి 8 కలపాలి.

సమాధానం: $8^2 + 8 = 72$

నంబర్ సిరీస్-5

సంఖ్యలపై కనీస అవగాహన, 15 వరకు ఘనాలు, 35 వరకు వర్గాలు, 100 వరకు ప్రధాన సంఖ్యలపై పట్టు, వేగంగా కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకార భాగహారాలు చేయగల నేర్పు ఉంటే నంబర్ సిరీస్ ప్రశ్నలను అతిసులభంగా చేయవచ్చు.

వీటితో పాటు ప్రశ్నను చూడగానే అది ఏ మోడల్‌కు చెందుతుందో ముందుగా గుర్తిం చాలి. ప్రశ్న ఒకవేళ మొదటి లేదా రెండో మోడల్‌కు చెందినట్లయితే, సంఖ్యల మధ్య వ్యత్యాసం చూసి, దాని ఆధారంగా సమా ధానం గుర్తించాలి. ఒకవేళ ప్రశ్న మూడు లేదా నాలుగో మోడల్‌కు చెందినట్లయితే వాటి మధ్య గుణకార లేదా భాగహార లేదా వర్గ లేదా ఘన సంబంధాలు ఉండవచ్చు. వీటి ఆధారంగా సమాధానాలు గుర్తించాలి. మొదటి నాలుగు మోడల్స్ గురించి గత సంచి కల్లో నేర్చుకున్నాం. ఇప్పుడు ఇతర మోడల్స్ పరిశీలిద్దాం.

ఆల్టర్‌నేటివ్ సిరీస్

గతంలో చెప్పుకున్న నాలుగు మోడల్స్‌కు ఇది భిన్నంగా ఉంటుంది. సిరీస్ ఒక క్రమపద్ధతిలో మారుతున్నట్లు కనిపించదు. ఇందులో సంఖ్యలు కొన్ని సందర్భాల్లో పెరుగుతూ, తగ్గుతూ ఉంటాయి. ఇలాంటి సందర్భాల్లో ఒక సంఖ్య వదిలి మరో సంఖ్య, ... ఈ విధంగా చివరి వరకు చూస్తే అవి ఏదో ఒక సిరీస్‌లో ఉంటాయి. అదేవిధంగా మిగిలిన సంఖ్యలు కూడా మరో సిరీస్‌లో ఉంటాయి. ముందు ఆ సిరీస్‌లను గమనించి సమాధా నాలు గుర్తించాలి.

కొన్ని ఉదాహరణలు

1. 2, 3, 4, 6, 6, 9, 8, 12, 10, 15, ...

ఇందులో ఒక సంఖ్య వదిలి మరో సంఖ్యను పరిశీలిస్తే ఒక సిరీస్ కనిపి స్తోంది. మిగిలిన సంఖ్యలు మరో సిరీస్‌లో ఉన్నాయి. ఆ రెండు సిరీస్‌లు

i) 2, 4, 6, 8, 10, ...

ii) 3, 6, 9, 12, 15, ...

ఇవి రెండు కూడా IA సిరీస్‌లో ఉన్నాయి. ఇందులో మొదటి సిరీస్‌లో చివరి సంఖ్య కావాలి. మొదటి సిరీస్ క్రమంగా పెరుగుతూ వ్యత్యాసం స్థిరంగా (IA) ఉంది. తర్వాత 12 రావాలి.

∴ సమాధానం: 12

2. 1, 2, 2, 5, 4, 8, 7, 11, 11, 14, ..., ...

ఇందులో రెండు సిరీస్‌లున్నాయి. అవి

i) 1, 2, 4, 7, 11, ...

ii) 2, 5, 8, 11, 14, ...

మొదటి సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం క్రమంగా పెరగడం (IB) సిరీస్‌లో ఉంది. ఈ సిరీస్‌లో వ్యత్యాసం క్రమంగా 1, 2, 3, 4 చొప్పున పెరిగింది. తర్వాత సంఖ్య 5 పెరగాలి.

11 + 5 = 16

రెండో సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం స్థిరంగా ఉండడం (IA)లో ఉంది. ఈ సిరీస్ ప్రతి సందర్భంలో 3 చొప్పున పెరుగుతుంది.

తర్వాత సంఖ్య = 14 + 3 = 17

∴ చివరి రెండు సంఖ్యలు 16, 17

3. 5, 7, 7, 6, 10, 5, 14, 4, 19, 3, ..., ...

ఇందులో రెండు సిరీస్‌లున్నాయి. అవి

i) 5, 7, 10, 14, 19, ...

ii) 7, 6, 5, 4, 3, ...

మొదటి సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం క్రమంగా పెరగడం (IB)లో ఉంది. ఇందులో వ్యత్యాసం క్రమంగా 2, 3, 4, 5 చొప్పున పెరిగింది. తర్వాత 6 పెరగాలి.

తర్వాత సంఖ్య 19 + 6 = 25

రెండో సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం, వ్యత్యా సం స్థిరంగా (IIA)లో ఉంది. సిరీస్ ప్రతి సందర్భంలో 1 చొప్పున తగ్గింది.

తర్వాత సంఖ్య 2

∴ చివరి రెండు సంఖ్యలు 25, 2

గ్రూప్ సిరీస్

ఇందులో ప్రతి మూడు సంఖ్యలు కాని, ప్రతి నాలుగు సంఖ్యలు కాని ఒక గ్రూపుగా ఉంటాయి. చివరి గ్రూపులో ఒక సంఖ్య మిస్ చేస్తూ ఉన్న ప్రశ్న ఇస్తారు. ముందులా ఒక గ్రూపులోని సంఖ్యల మధ్య ఎలాంటి సంబం ధం ఉందో కనుక్కొని, దాని ఆధారంగా సమాధానం కనుక్కోవాలి.

4. 2, 3, 5, 7, 8, 15, 17, 18, ...

ఇందులో ప్రతి మూడు సంఖ్యలు ఒక గ్రూపుగా ఉన్నాయి. ప్రతి గ్రూపులోని మొదటి రెండు సంఖ్యల మొత్తం మూడో సంఖ్య అవుతుంది. 2 + 3 = 5; 7 + 8 = 15 అదేవిధంగా 17 + 18 = 35.

∴ సమాధానం: 35

5. 6, 10, 8, 10, 20, 15, 15, 17, ...

ఈ సిరీస్‌లో ప్రతి మూడు సంఖ్యలు ఒక గ్రూపుగా ఉన్నాయి. ఇందులో ప్రతి గ్రూపులోని మొదటి రెండు సంఖ్యల సరాసరి మూడో సంఖ్య అవుతుంది.

$\frac{6+10}{2}=8;\ \frac{10+20}{2}=15$ అదేవిధంగా $\frac{15+17}{2}=16$

∴ సమాధానం: 16

6. 20,5,100,4,30,5,150,6,40,4,160, ...

ఈ సిరీస్‌లో ప్రతి నాలుగు సంఖ్యలు ఒక గ్రూపుగా ఉన్నాయి. ఇందులో ప్రతి గ్రూపులోని మొదటి రెండు సంఖ్యల లబ్ధం మూడో సంఖ్యగా, మొదటి సంఖ్యను రెండో సంఖ్యతో భాగిస్తే వచ్చిన భాగఫలం నాలుగో సంఖ్యగా వచ్చింది.

$20 \times 5 = 100;\ 20 \div 5 = 4$

$30 \times 5 = 150;\ 30 \div 5 = 6$

$40 \times 4 = 160;\ 40 \div 4 = 10$

∴ సమాధానం: 10

ఇతర ప్రశ్నలు

పైన చెప్పుకున్న 6 మోడల్స్‌లో రాకుండా మిగిలిన ఇతర ప్రశ్నలను ఈ గ్రూప్‌లో పరిశీలిద్దాం.

7. 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... (ఎండోమెంట్ ఆఫీసర్స్)

ఈ గ్రూపులో మొదటి రెండు సంఖ్యలు మినహా మిగిలిన అన్ని సంఖ్యలు, దాని కంటే ముందున్న రెండు సంఖ్యల మొత్తంగా ఉన్నాయి.

$1 + 2 = 3;\ 2 + 3 = 5;\ 3 + 5 = 8;\ 5 + 8 = 3;\ 13 + 21 = 34$ అదేవిధంగా $21 + 34 = 55$

∴ సమాధానం: 55

8. 1, 2, 2, 4, 8, 32, ...

ఈ గ్రూపులో మొదటి రెండు సంఖ్యలు మినహా మిగతా అన్ని సంఖ్యలు దాని కంటే ముందున్న రెండు సంఖ్యల లబ్ధంగా ఉంది.

$1 \times 2 = 2;\ 2 \times 2 = 4;\ 4 \times 8 = 32;$ అదేవిధంగా $8 \times 32 = 256$

∴ సమాధానం: 256

నంబర్ సిరీస్ -6

పోటీ పరీక్షల్లో రీజనింగ్ అంశంలో నంబర్‌కు సంబంధించి ఏ ప్రశ్న ఇచ్చిన వేగంగా చేయాలంటే కింది అంశాలపై కనీస అవగాహన అవసరం. అవి....

- సహజ సంఖ్యలు, పూర్ణాంకాలు, పూర్ణ సంఖ్యలు, అకరణీయ సంఖ్యలు, సరి సంఖ్యలు, బేసి సంఖ్యలు మొదలైన వాటిపై అవగాహన ఉండాలి.
- వంద వరకు ఉన్న ప్రధాన సంఖ్యలు తెలిసుం డాలి. అవి....
- 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97
- 35 వరకు వర్గ సంఖ్యలు తెలిసుండాలి.
- 15 వరకు ఘన సంఖ్యలు తెలిసుండాలి.
- కూడిక, తీసివేత, గుణకార, భాగహారాలు వేగంగా చేయగలగాలి. దీని కోసం వేద గణితాన్ని సాధన చేస్తే సరిపోతుంది.

నంబర్ సిరీస్‌లో వస్తున్న ప్రశ్నలు పరిశీలిస్తే కొన్ని సంఖ్యలు ఏదో ఒక నిర్దిష్ట నియమాన్ని పాటిస్తూ ఒక వరుస క్రమంలో వస్తాయి. ఆ నియ మాన్ని గమనించి, అదే నియమంతో చివర వచ్చే సంఖ్యను కనుక్కోవాలి. గత 20 సంవత్సరాలుగా జరుగుతున్న వివిధ పోటీ పరీక్షల్లో వస్తున్న నంబర్ సిరీస్ ప్రశ్నలను పరిశీలిస్తే వాటిని ముఖ్యంగా 9 రకాలుగా వర్గీకరించొచ్చు అవి...

- సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం
- సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం
- మిశ్రమ సిరీస్

- సిరీస్ వేగంగా పెరగడం
- సిరీస్ వేగంగా తగ్గడం
- ఆల్టర్‌నేటివ్ సిరీస్
- గ్రూప్ సిరీస్
- ద్విసంఖ్యామాన సిరీస్
- ఇతర ప్రశ్నలు

ఇప్పుడు ఒక్కొక్కదాన్ని పరిశీలిద్దాం

1. సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం:

సిరీస్‌లోని సంఖ్యలు క్రమంగా పెరుగుతూ ఉంటాయి. వీటి మధ్య వ్యత్యాసం ఆధారంగా దీన్ని మళ్లీ మూడు రకాలుగా వర్గీకరించుకోవచ్చు.

అవి...

ఎ) సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం స్థిరంగా ఉండటం

బి) సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం పెరగడం

సి) సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం తగ్గడం

వీటికి కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం

1 (ఎ) సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం స్థిరంగా ఉండటం:

1. 3, 7, 11, 15, 19, ______

4 4 4 4

పై సిరీస్‌లో ఏ రెండు సంఖ్యల మధ్య వ్యత్యాసం చూసినా '4' ఉంది. అంటే ప్రతి సందర్భంలో '4' చొప్పున పెరుగుతుంది. తర్వాత కూడా 4 పెరగాలి.

జవాబు:

19 + 4 = 23 రావాలి.

2. 7, 13, 19, 25, 31, 37, ______

6 6 6 6 6

పై సిరీస్‌లో ఏ రెండు సంఖ్యల మధ్య వ్యత్యాసం చూసినా 6 (స్థిరంగా) ఉంది. అంటే ప్రతి సందర్భంలో '6' చొప్పున పెరిగింది. తర్వాత కూడా '6' పెరగాలి.

జవాబు: 37 + 6 = 43

1 (బి) సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం పెరగడం:

3. 2, 3, 5, 8, 12, 17, ______

1 2 3 4 5

పై సిరీస్ క్రమంగా పెరిగింది. వ్యత్యాసం కూడా క్రమంగా 1, 2, 3, 4, 5 చొప్పున పెరిగింది. తర్వాత 6 పెరగాలి.

∴ **జవాబు:**

17 + 6 = 23

4. 5, 9, 17, 29, 45, ______

4 8 12 16

పై సిరీస్ క్రమంగా పెరిగింది. వ్యత్యాసం కూడా క్రమంగా 4, 8, 12, 16 చొప్పున పెరిగింది. తర్వాత 20 పెరగాలి.

∴ **జవాబు:**

45 + 20 = 65

5. 4, 6, 9, 14, 21, ______

2 3 5 7

పై సిరీస్ క్రమంగా పెరిగింది. వ్యత్యాసం కూడా ప్రధాన సంఖ్యలైన 2, 3, 5, 7 చొప్పున పెరిగాయి. తర్వాత '7' తర్వాత వచ్చే ప్రధాన సంఖ్య అయిన 11 పెరగాలి.

∴ **జవాబు:**

21 + 11 = 32

1 (సి) సిరీస్ క్రమంగా పెరగడం, వ్యత్యాసం తగ్గడం:

6. 2, 12, 20, 26, 30, ______

10 8 6 4

పై సిరీస్ క్రమంగా పెరిగింది. కాని వాటి మధ్య వ్యత్యాసం క్రమంగా 10, 8, 6, 4 చొప్పున తగ్గింది. తర్వాత '2' రావాలి.

∴ **జవాబు:**

30 + 2 = 32

7. 5, 24, 41, 54, 65, ______

19 17 13 11

పై సిరీస్ క్రమంగా పెరిగింది. కాని వాటి మధ్య వ్యత్యాసం క్రమంగా 19, 17, 13, 11 చొప్పున తగ్గింది. ఇవి చూడటానికి బేసి సంఖ్యలుగా కనిపించినప్పటికీ మధ్యలో 17 తర్వాత 15 రావాలి. కాని 15

లేదు.

కాబట్టి ఇది బేసి సంఖ్యల వరుసక్రమం కాదు. ఇవి ప్రధాన సంఖ్యలు. క్రమంగా తగ్గుతూ వచ్చాయి. 11 తర్వాత వచ్చే ప్రధాన సంఖ్య '7'.

∴ **జవాబు:**

65 + 7 = 72

2. సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం:

సిరీస్‌లోని సంఖ్యలు క్రమంగా తగ్గుతూ ఉంటాయి. వీటి మధ్య వ్యత్యాసం ఆధారంగా దీన్ని మళ్లీ మూడు రకాలుగా వర్గీకరించవచ్చు. అవి...

ఎ) సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం, వ్యత్యాసం స్థిరంగా ఉండటం

బి) సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం, వ్యత్యాసం పెరగడం

సి) సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం, వ్యత్యాసం తగ్గడం

2 (ఎ) సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం, వ్యత్యాసం స్థిరంగా ఉండటం:

8. 90, 86, 82, 78, 74, 70, ———

4 4 4 4 4

పై సిరీస్ క్రమంగా తగ్గుతుంది. వ్యత్యాసం ఏ రెండు సంఖ్యల మధ్య చూసినా '4' (స్థిరంగా) ఉంది. తర్వాత కూడా '4' తగ్గాలి.

∴ **జవాబు:**

70 – 4 = 66

9. 100, 94, 88, 82, 76, 70, ———

6 6 6 6 6

పై సిరీస్ క్రమంగా తగ్గుతుంది. వ్యత్యాసం ఏ రెండు సంఖ్యల మధ్య చూసినా '6' (స్థిరంగా) ఉంది. తర్వాత కూడా '6' తగ్గాలి.

∴ **జవాబు:**

70 – 6 = 64

2 (బి) సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం, వ్యత్యాసం పెరగడం:

10. 100, 98, 94, 88, 80, 70, ———

2 4 6 8 10

పై సిరీస్ క్రమంగా తగ్గుతుంది. కాని వ్యత్యాసం 2, 4, 6, 8, 10 చొప్పున పెరుగుతుంది. తర్వాత 12 రావాలి.

∴ **జవాబు:**

70 – 12 = 58

11. 80, 77, 72, 65, 56, ______

3 5 7 9

పై సిరీస్ క్రమంగా తగ్గుతుంది. కాని వ్యత్యాసం 3, 5, 7, 9 చొప్పున పెరిగింది. తర్వాత 11 రావాలి.

∴ **జవాబు:**

56 – 11 = 45

2 (సి) సిరీస్ క్రమంగా తగ్గడం, వ్యత్యాసం తగ్గడం:

12. 110, 100, 92, 86, 82, ______

10 8 6 4

పై సిరీస్ క్రమంగా తగ్గింది. వ్యత్యాసం కూడా క్రమంగా 10, 8, 6, 4 చొప్పున తగ్గింది. తర్వాత '2' రావాలి.

∴ **జవాబు:**

82 – 2 = 80

13. 200, 180, 164, 152, 144, ______

20 16 12 8

పై సిరీస్ క్రమంగా తగ్గింది. వ్యత్యాసం కూడా క్రమంగా 20, 16, 12, 8 చొప్పున తగ్గింది. తర్వాత '4' రావాలి.

∴ **జవాబు:**

144 – 4 = 140

14. 90, 79, 72, 67, 64, ______

11 7 5 3

పై సిరీస్ క్రమంగా తగ్గింది. వ్యత్యాసం కూడా క్రమంగా 11, 7, 5, 3 చొప్పున తగ్గింది. ఇవి చూడటానికి బేసి సంఖ్యలుగా కనిపించినప్పటికి 11 తర్వాత '9' రాలేదు. కాబట్టి వీటిని ప్రధాన సంఖ్యలుగా చెప్పుకోవచ్చు. వ్యత్యాసం ప్రధాన సంఖ్యల చొప్పున క్రమంగా తగ్గుతున్నాయి. '3' కంటే చిన్న ప్రధాన సంఖ్య '2' కాబట్టి తర్వాత '2' తగ్గాలి.

∴ **జవాబు:**

64 – 2 = 62

మిగతా మోడల్స్‌కు సంబంధించిన అంశాలను వచ్చే సంచికలో పరిశీలిద్దాం.

లెటర్ సిరీస్-1

లెటర్ సిరీస్‌పై పట్టు సాధించాలంటే..

- A నుంచి Z వరకు; Z నుంచి A వరకు వేగంగా చదవగలగాలి.
- A నుంచి Z వరకు వాటి స్థాన విలువలు (A–1, B–2, C–3, ... Y–25, Z–26) తెలిసి ఉండాలి.
- Z నుంచి A వరకు రివర్స్ ఆర్డర్‌లో వాటి స్థాన విలువలు (Z–1, Y–2, X–3, ... B–25, A–26) తెలిసి ఉండాలి.
- A నుంచి Z వరకు రివర్స్ పొజిషన్ లెటర్స్ (అంటే A కు Z, B కు Y.......) తెలిసి ఉండాలి.
- వీటితో పాటు నంబర్ సిరీస్‌పై సంపూర్ణ అవగాహన ఉండాలి.

పై అంశాలను చక్కగా ప్రాక్టీస్ చేస్తే లెటర్ సిరీస్ త్వరగా చేయగలుగుతాం.

ముందుగా A నుంచి Z వరకు స్థాన విలువలను పరిశీలిద్దాం. ఈ స్థాన విలువలను బట్టీపట్టడం ద్వారా పెద్ద ప్రయోజనం ఉండదు. త్వరగా మర్చిపోయే అవకాశం ఉంది. అలా కాకుండా కింద ఇచ్చిన పదాన్ని దాని స్థాన విలువలను గుర్తుంచుకోవాలి.

A	E	J	O	T	Y
1	5	10	15	20	25

పై పదాన్ని వాటి స్థాన విలువలను గుర్తుంచు కుంటే వీటి తర్వాత అక్షరాల స్థాన విలువలను వీటి ఆధారంగా గుర్తుంచుకోవచ్చు. మిగతా అక్ష రాలకు కూడా ఎవరికి వారు తమకు గుర్తుండే రీతిలో సొంతంగా కోడ్‌లు తయారు చేసుకుంటే అవి చాలా సులువుగా గుర్తుంటాయి.

ఉదాహరణకు "బృందావన కాలని 7/G" అనే సినిమా పేరు తెలియని వారు ఉండరు. ఈ సినిమా పేరు తెలిస్తే G స్థాన విలువ 7 అని గుర్తుంటుంది. అలాగే ఇటీవల క్రికెట్‌లో బాగా పాపులర్ అయిన ట్వంటీ–ట్వంటీని ఎవరూ మర్చిపోలేరు. దీన్ని T-ట్వంటీ అని గుర్తుంచు కుంటే T స్థాన విలువ 20 అని తెలుస్తుంది. ఇలా మిగతా అక్షరాలకు కూడా సొంతంగా కోడ్‌లు గుర్తుంచుకొని సాధన చేయాలి.

రివర్స్ ఆర్డర్‌లో అంటే Z నుంచి A వరకు స్థాన విలువలు గుర్తుంచుకోవాలంటే, వీటి కోసం పెద్దగా కష్టపడనవసరం లేదు. ఒక సులు వైన చిట్కా ద్వారా వీటిని గుర్తుంచుకోవచ్చు. కాని ముందుగా మనకు A నుంచి Z వరకు స్థాన విలువలు తెలిసి ఉండాలి.

ఏదైనా అక్షరం రివర్స్ ఆర్డర్‌లో స్థాన విలు వ కావాలంటే 27 నుంచి మనకు కావాల్సిన అక్ష రం స్థాన విలువను తీసివేయాలి.

ఉదాహరణకు రివర్స్ ఆర్డర్‌లో 'L' స్థాన విలువ కావాలంటే 27 నుంచి L స్థాన విలువను తీసివేయాలి. 27–12 = 15. కాబట్టి 15 అనేది L రివర్స్ ఆర్డర్‌లో స్థాన విలువ అవుతుంది.

రివర్స్ ఆర్డర్‌లో

Q స్థాన విలువ = 27 – 17 = 10

T స్థాన విలువ = 27 – 20 = 7

వీటితో పాటు అక్షరాల రివర్స్ పొజిషన్ లెటర్స్ తెలిసి ఉండాలి. దీనికి ముందుగా అక్షరం రివర్స్ పొజిషన్ నంబర్ తెలుసుకొని, ఆ స్థాన విలువ గల అక్షరాన్ని కనుక్కోవాలి. ఇదే ఆ అక్షరం రివర్స్ పొజిషన్ లెటర్ అవుతుంది.

ఉదాహరణకు 'R' రివర్స్ పొజిషన్ లెటర్ కావాలంటే R రివర్స్ పొజిషన్ లెటర్ కనుక్కోవాలి. R రివర్స్ పొజిషన్ లెటర్ = 27 – 18 = 9. 9వ అక్షరం I. కాబట్టి R రివర్స్ పొజిషన్ లెటర్ I. 'R' రివర్స్ పొజిషన్ లెటర్ 'I' అయితే 'I' రివర్స్ పొజిషన్ లెటర్ 'R' అవుతుంది.

ఈ లెటర్ సిరీస్‌లో అక్షరాల మధ్య వ్యత్యా సం స్వల్పంగా ఉంటే డైరెక్ట్‌గా సమాధానం గుర్తించవచ్చు. కాని అక్షరాల మధ్య వ్యత్యాసం ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు, ఆ అక్షరాల స్థాన విలు వలు రాయాలి. అది ఒక నంబర్ సిరీస్ అవు తుంది. దాని ఆధారంగా చివర వచ్చే నంబర్ కనుక్కొని దాని స్థాన విలువను బట్టి కావాల్సిన అక్షరాన్ని కనుక్కోవాలి.

ఉదాహరణలు

1. N, P, R, T, V, ———

పై సిరీస్‌లో ప్రతి అక్షరం తర్వాత ఒక అక్షరం మినహాయిస్తూ తర్వాత అక్షరాలు ఉన్నాయి. N తర్వాత 'O' మినహాయించి 'P' వస్తుంది. అదే విధంగా 'V' తర్వాత 'W' మినహాయించి 'X' రావాలి.

∴ సమాధానం 'X'

2. A, E, I, ——, U

ఇందులో ఇంగ్లిష్‌లోని అచ్చులు వరుసగా ఉన్నాయి. మధ్య ఖాళీలో 'O' రావాలి.

∴ సమాధానం 'O'

3. W, V, T, S, Q, P, N, M, ——, ——

(సీబీఐ 1996)

ఎ) I, J బి) J, I

సి) J, K డి) K, J

ఈ అక్షరాలను వాటి స్థాన విలువల ప్రకారం రాస్తే...... 23, 22, 20, 19, 17, 16, 14, 13, ——, ——— అనే నంబర్ సిరీస్ ఏర్పడింది. ఈ సిరీస్ క్రమంగా 1, 2, 1, 2, ... చొప్పున తగ్గుతుంది.

చివరిసారి 14 నుంచి 13కు '1' తగ్గింది. ఆ తర్వాత 2, 1లు తగ్గాలి.

∴ 13 – 2 = 11

11 – 1 = 10

∴ 11వ అక్షరం K; 10వ అక్షరం J

సమాధానం K, J

4. Z, X, V, T, R, ——, ——

(ఎండోమెంట్ ఆఫీసర్ 2008)

ఎ) O, K బి) N, M

సి) P, N డి) M, N

పై సిరీస్‌లో అక్షరాలు రివర్స్ ఆర్డర్‌లో ఒకటి వదిలి మరొకటి వచ్చాయి. కాబట్టి తర్వాత P, Nలు రావాలి.

∴ సమాధానం (c) P, N

5. AZ, CX, FU, ———

(సివిల్ సర్వీసెస్ 1996)

ఎ) JQ బి) KP

సి) JR డి) IV

ఈ సిరీస్‌లోని అక్షరాలను వాటి స్థాన విలువల ప్రకారం రాస్తే

1,26, 3,24, 6,21, ———

ఇందులో మొదటి సంఖ్యలో 1, 3, 6, ———లు వరుసగా 2, 3 చొప్పున పెరిగాయి. తర్వాత '4' పెరగాలి. అంటే 6 + 4 = 10 రావాలి.

రెండో సంఖ్యలు 26, 24, 21లు వరుసగా 2, 3ల చొప్పున తగ్గాయి. తర్వాత '4' తగ్గాలి. అంటే 21 – 4 = 17 రావాలి.

అంటే తర్వాత ఖాళీలో వరుసగా 10వ, 17వ అక్షరాలైన JQలు రావాలి.

∴ సమాధానం : JQ

6. POQ, SRT, VUW, ——

(సివిల్ సర్వీసెస్ 1997)

ఎ) XYZ బి) XZY

సి) YXZ డి) YZX

పై సిరీస్‌లో ప్రతి సమూహంలో మూడు అక్షరాలు ఉన్నాయి. వీటిని స్థాన విలువల ప్రకారం రాస్తే

16, 15, 17 ; 19, 18, 20 ; 22, 21, 23, ——

పై నంబర్ సిరీస్‌లో ఈ గ్రూపుల్లోని మొదటి సంఖ్య 3 చొప్పున పెరిగింది. తర్వాత 22 + 3 = 25

రావాలి. ప్రతి గ్రూపులోని రెండో, మూడో సంఖ్యలు వరుసగా –1, +2 చొప్పున మారాయి.

25 – 1 = 24 ; 24 + 2 = 26

అంటే తర్వాత ఖాళీలో 25, 24, 26వ అక్షరాలైన YXZ రావాలి.

∴ సమాధానం 'YXZ'

7. B, I, P, W, D, K, ——

(నాన్ గెజిటెడ్ 2005)

ఎ) P బి) K సి) R డి) Z

అక్షరాలను స్థాన విలువల ప్రకారం రాస్తే

2, 9, 16, 23, 4, 11, ——

సిరీస్ ప్రతి సందర్భంలో '7' చొప్పున పెరిగింది. 2 + 7 = 9 ఇదే విధంగా 23 + 7 = 30 అవుతుంది. కాని ఇంగ్లిష్‌లో 26 అక్షరాలు మాత్రమే ఉన్నాయి. 26 కంటే పెద్ద సంఖ్య వస్తే ఆ సంఖ్య నుంచి 26ను తీసివేయాలి. ఇక్కడ 30 – 26 = 4. 4వ అక్షరం 'D'

4 + 7 = 11. చివరి అక్షరం 11 + 7 = 18వ అక్షరం 'R' రావాలి.

∴ సమాధానం 'R'

8. G, I, J, J, L, M, M, O, P, P, ——

(గెజిటెడ్ 2006)

ఎ) O బి) P సి) R డి) S

పై లెటర్ సిరీస్‌ను నంబర్ సిరీస్‌లోకి మారిస్తే 7, 9, 10, 10, 12, 13, 13, 15, 16, 16, —

పై సిరీస్ 2, 1, 0, 2, 1, 0, ... చొప్పున పెరుగుతుంది. ఇప్పుడు 2 పెరగాలి 16 + 2 = 18వ అక్షరం 'R' రావాలి.

∴ సమాధానం 'R'

9. A, F, K, ——

(ఎ.ఇ.ఇ. 2008)

ఎ) P బి) Q సి) R డి) S

పై సిరీస్ క్రమంగా 5 స్థానాలు ముందుకు జరిగింది.

11 (K) + 5 = 16

16వ అక్షరం 'P'

∴ సమాధానం 'P'

ప్రాక్టీస్ బిట్స్

1. DIL, GLO, JOR, ——

(గ్రూప్-1 ప్రిలిమ్స్ 2008)

ఎ) XAD   బి) GJM

సి) MRU   డి) PSV

2. $\frac{C}{G}, \frac{M}{R}, \frac{D}{J}, \frac{O}{?}$

(గ్రూప్-1 బ్యాక్‌లాగ్ 2002)

ఎ) V   బి) S   సి) T   డి) M

3. A, D, H, M, ——, ——

(గ్రూప్-1 1991)

ఎ) O, T   బి) N, S

సి) S, Z   డి) U, Y

4. D, J, P, V, B, H, ——

(గ్రూప్-2 2005)

ఎ) N   బి) Q   సి) K   డి) S

5. C, G, L, R, ——

ఎ) U   బి) S   సి) Y   డి) Z

6. MN, LO, KP, ——

ఎ) RS   బి) JQ

సి) IJ   డి) QR

7. BAT, DCV, FEX, ——

ఎ) HGI   బి) HGZ

సి) HIJ   డి) HGY

సమాధానాలు

1	సి	2	ఎ	3	సి	4	ఎ
5	సి	6	బి	7	బి		

లెటర్ సిరీస్-2

లెటర్ సిరీస్‌లో కొన్ని కీలక అంశాల గురించి తెలుసుకుందాం.

లెటర్ సిరీస్‌లో మరో విభాగం చిన్న అక్షరాలు (a,b,c,....z). ఒక క్రమమైన పద్ధతిలో వస్తూ మధ్యలో కొన్ని ఖాళీలు ఇస్తారు. ఆ అక్షరాలు మధ్య సంబంధాన్ని కనుక్కొని దాని ఆధారంగా ఖాళీలో రావాల్సిన అక్షరాలను గుర్తించాలి.

ఇందులో ముఖ్యంగా అక్షరాలు పునరావృత పద్ధతిలో వచ్చే అవకాశం ఉంది. అంటే కనీసం 2 అక్షరాల నుంచి గరిష్ఠంగా ఆరు అక్షరాల సమూహం వరకు అదే వరుస క్రమంలో పునరావృతం అవుతూ ఉంటాయి. ఈ సిరీస్ మధ్యలో కొన్ని అక్షరాలను మినహాయిస్తూ వాటిని కనుక్కోమంటారు.

ఇలాంటి ప్రశ్నలకు ముందుగా ఆ సిరీస్ రెండు అక్షరాల పునరావృత పద్ధతి అనుకుంటే, దానిని ప్రతి రెండు అక్షరాలను ఒక భాగంగా ఊహించుకోవాలి. ఆ విధంగా చేసిన తర్వాత ప్రతి గ్రూప్‌లో మొదటి అక్షరం ఒకటే ఉండాలి. లేదా ఖాళీగా ఉండాలి. అలాగే రెండో అక్షరాన్ని పరిశీలించాలి. ఇక్కడ ఖాళీగా ఉన్న స్థానాలను ఆయా అక్షరాలతో పూరించాలి. ఒకవేళ ఆ విధంగా లేకుంటే మూడక్షరాల సమూహం, నాలుగు, ఐదు, ఆరు, అక్షరాలు ఊహించుకొని మొదటి అక్షరం మొదలుకొని చివరి అక్షరం వరకు పరిశీలించాలి. ఆయా స్థానాలలో అవే అక్షరాలు ఉండాలి. లేదా ఖాళీ ఉండాలి. దీని ఆధారంగా ఖాళీలున్నచోట ఏ అక్షరాలు వస్తాయో సులభంగా కనుక్కోవచ్చు.

కొన్ని ఉదాహరణలు

1. _bc_bca_ _a_cab_ab_

a) aabbcc b) aabcbcc

c) aabcbc d) aacbbcc

పై ప్రశ్న గమనిస్తే abc అనే మూడక్షరాలు పలుమార్లు పునరావృతం అయినట్లు తెలుస్తుంది.

abc / abc / abc / abc / abc / abc

సమాధానం: (b) aabcbcc

2. _ _aba_ _ba_ab

a) abbba b) abbab

c) baabb d) bbaba

పై ప్రశ్నను గమనిస్తే ab అక్షరాలు అనేకసార్లు పునరావృతం అయినట్లు తెలు స్తుంది.

ab / ab / ab / ab / ab / ab

సమాధానం: (b) abbab

3. a_bbc_aab_cca_bbcc

a) acba b) bacb

c) abba d) caba

పై ప్రశ్నను గమనిస్తే aabbcc అనే అక్షరాలు పలుమార్లు పునరావృతం అయినట్లు తెలు స్తుంది.

aabbcc / aabbcc / aabbcc

సమాధానం: (a) acba

4. b_ _d bac_ _acd _ac_ ba_ _

a) acdbdcd b) acdbbacd

c) acdbbdcd d) adcbbdcd

పై ప్రశ్నను గమనిస్తే bacd అనే నాలుగక్షరాలు పలుమార్లు పునరావృతం అయినట్లు తెలుస్తుంది.

bacd / bacd / bacd / bacd / bacd

సమాధానం: (c) acdbbdcd

5. Pa_cQab_Rab_S_ _C

a) bcab b) bccba

c) bcacb d) bccab

పై ప్రశ్నను గమనిస్తే abc మూడక్షరాలు పలుమార్లు పునరావృతం కావటంతో పాటు ప్రతిసారి abc ముందు వరుసగా Capital letters P Q R Sలు వచ్చాయని తెలుస్తుంది.

Pabc / Qabc / Rabc / Sabc

సమాధానం: (d) bccab

6. a_cdaab_cc_daa_bbb_ccddd

a) bdbda b) bddca
c) dbbca d) bbdac

పై సిరీస్ abcd అక్షరాలు మొదటిసారి ఒక్కోసారి, రెండోసారి ప్రతి అక్షరం రెండుసార్లు, మూడోసారి ప్రతి అక్షరం మూడుసార్లు పునరావృతమైనాయి.

abcd / aabbccdd / aaabbbcccddd

సమాధానం: (d) bbdac

7. _abb_ _bb_a_bbab_ba

a) bababa b) bbabbb
c) ababaa d) aaaabb

పై సిరీస్‌లో babb అక్షరాలు పలుమార్లు పునరావృతమైనాయి.

babb / babb / babb / babb / ba

సమాధానం: (b) bbabbb

8. ab_ _cac_b

a) abc b) bca
c) cab d) cba

పై సిరీస్‌లో abc అక్షరాలు చక్రీయ పద్ధతిలో అనగా abc, bca, cabలుగా వచ్చాయి.

abc / bca / cab

సమాధానం: (d) cba.

గతంలో వచ్చిన ప్రశ్నలు

1. abc_d_bc_d_b_cda

a) bacde b) cdabe
c) dacab d) decdb

abcdd / abccd / abbcd / a

సమాధానం: (c) dacab.

2. ba_b_aab_a_b

a) abaa b) abba
c) baab d) babb

baab / baab / baab

సమాధానం: (b) abba.

3. gfe_ig _eii_fei_gf_ii

a) eifgi b) figie
c) ifgie d) ifige

gfeii / gfeii / gfeii / gfeii

సమాధానం: (c) ifgie

4. mnonopq opqrs _ _ _ _ _

a) mnopq b) oqrst
c) pqrst d) qrstu

mno / nopq / opqrs / pqrst

సమాధానం: (c) pqrst

లెటర్ సిరీస్-3

మౌలిక అంశాలు

ఆంగ్ల అక్షరాలు–26. వీటిలో A, E, I, O, U అనే 5 అక్షరాలు అచ్చులు (Vowels), మిగిలిన 21 అక్షరాలు హల్లులు (Consonants).

ఆంగ్ల అక్షరమాలలో ఆయా అక్షరాల క్రమసంఖ్య లేదా స్థాన విలువ (Serial number or positional value)లను గుర్తించగలగాలి. అంటే...

A-1, B-2, C-3, D-4, ... X-24, Y-25, Z-26. అదే విధంగా వ్యతిరేక దిశలో ఆయా అక్షరాల క్రమసంఖ్యలను గుర్తించగలగాలి. అంటే...

A-26, B-25, C-24, D-23, ..X-3, Y-2, Z-1

వ్యతిరేక దిశలో ఒక అక్షరం క్రమ సంఖ్య = 27– ముందు నుంచి ఆ అక్షరం క్రమ సంఖ్య.

ఉదా: వ్యతిరేక దిశలో 'E' క్రమ సంఖ్య.

= 27 – 5 = 22;

వ్యతిరేక దిశలో 'C' క్రమ సంఖ్య = 27 – 3 = 24

ఉదా: ఆంగ్ల అక్షరమాలలో ఎన్ని అక్షరాలకు అద్దంలోని ప్రతిబింబాలు కూడా అవే అక్షరాలుగా ఉంటాయి?

ఎ) 9 బి) 10 సి) 11డి) 12

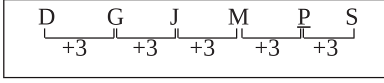
(సివిల్స్– ప్రిలిమ్స్ 2009)

సమాధానం: A, H, I, M, O, T, U, V, W, X అనే '10' అక్షరాలకు అద్దంలోని ప్రతిబింబాలు కూడా అవే అక్షరాలుగా ఉంటాయి.

∴ సమాధానం: బి

ఉదా: D, G, J, M, ——, S.

సమాధానం: అక్షరాల శ్రేణిలో ప్రధానంగా వరుస అక్షరాల క్రమ సంఖ్యల మధ్య భేదాన్ని గమనించాలి.

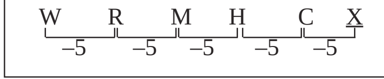


అంటే ఒక అక్షరం నుంచి మూడు స్థానాలు ముందుకు వెళ్తే శ్రేణిలోని తర్వాత అక్షరం వస్తుంది.

∴ **సమాధానం:** P ('M' నుంచి మూడు స్థానాలు ముందుకు వెళ్తే (N, O, P) 'P' వస్తుంది)

ఉదా: W, R, M, H, C, ——

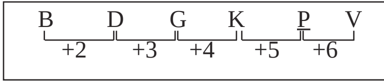
సమాధానం:



అంటే ఒక అక్షరం నుంచి 5 స్థానాలు వెనక్కి వెళ్తే శ్రేణిలోని తర్వాత అక్షరం వస్తుంది. కాబట్టి 'C' నుంచి '5' స్థానాలు వెనక్కి వెళ్తే (B, A, Z, Y, X) 'X' వస్తుంది. కాబట్టి సమాధానం: X

ఉదా: B, D, G, K, ——, V.

సమాధానం:



అంటే ఒక అక్షరం నుంచి వరుసగా 2, 3, 4, 5, 6 స్థానాలు ముందుకు వెళ్తే తర్వాత అక్షరాలు వస్తాయి.

∴ సమాధానం: **P**

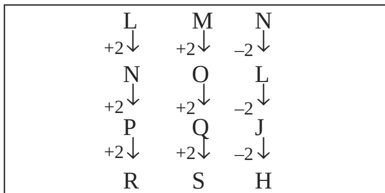
ఉదా: AN, BO, CP, DQ, ———

సమాధానం: ప్రతి పదంలోని మొదటి అక్షరాలు (A, B, C, D) వరుసగా ఉన్నాయి. అలాగే రెండో అక్షరాలు (N, O, P, Q) కూడా వరుసగా ఉన్నాయి.

∴ సమాధానం: **ER**

ఉదా: LMN, NOL, PQJ, ——

సమాధానం: వరుస పదాల్లోని ఆయా అక్షరాల క్రమ సంఖ్యల మధ్య భేదాలను గమనిస్తే...



∴ సమాధానం: **RSH**

ఉదా: NLK, JHG, ——, BZY.

సమాధానం: వరుస పదాల్లోని ఆయా అక్షరాల క్రమసంఖ్యల మధ్య భేదాలను గమనిస్తే...

N $\xrightarrow{-4}$ J $\xrightarrow{-4}$ F $\xrightarrow{-4}$ B
L $\xrightarrow{-4}$ H $\xrightarrow{-4}$ D $\xrightarrow{-4}$ Z
K $\xrightarrow{-4}$ G $\xrightarrow{-4}$ C $\xrightarrow{-4}$ Y

∴ సమాధానం: **FDC**

ఉదా: NLK, JHG, ——, YWV

సమాధానం:

N $\xrightarrow{-4}$ J $\xrightarrow{-5}$ E $\xrightarrow{-6}$ Y
L $\xrightarrow{-4}$ H $\xrightarrow{-5}$ C $\xrightarrow{-6}$ W
K $\xrightarrow{-4}$ G $\xrightarrow{-5}$ B $\xrightarrow{-6}$ V

∴ సమాధానం: **ECB**

ఉదా: AZBY, CXDW, ——, GTHS

(గ్రూప్–I, మెయిన్స్ మోడల్ పేపర్–2008)

సమాధానం:

ఈ ప్రశ్నను పై రెండు ప్రశ్నలు సాధించిన విధంగా ఆయా అక్షరాల క్రమ సంఖ్యల మధ్య భేదాలు గుర్తించి సాధించవచ్చు. (లేదా)

వరుస పదాల్లోని మొదటి, మూడో అక్షరాలు– A, B, C, D, –, –, G, H వరుసగా ఉన్నాయి. కాబట్టి ఖాళీల్లో E, Fలు రావాలి. అలాగే రెండో, నాల్గో అక్షరాలను వ్యతిరేక దిశలో గమనిస్తే...

S, T, –, –, W, X, Y, Zలు కూడా వరుసగా ఉన్నాయి. కాబట్టి ఖాళీ స్థానాల్లో U, Vలు వస్తాయి.

కాబట్టి సమాధానం: EVFU

ఉదా: NAOB, PCQD, ——, TGUH

(గ్రూప్–1,మెయిన్స్ 2008)

సమాధానం: ఈ ప్రశ్నపై ప్రశ్నలాంటిదే. పై ప్రశ్నను సాధించిన విధంగా సాధించొచ్చు లేదా ఆయా అక్షరాల క్రమసంఖ్యల మధ్య భేదాలు గుర్తించి సాధించొచ్చు.

N $\xrightarrow{+2}$ P $\xrightarrow{+2}$ R $\xrightarrow{+2}$ T
A $\xrightarrow{+2}$ C $\xrightarrow{+2}$ E $\xrightarrow{+2}$ G
O $\xrightarrow{+2}$ Q $\xrightarrow{+2}$ S $\xrightarrow{+2}$ U
B $\xrightarrow{+2}$ D $\xrightarrow{+2}$ F $\xrightarrow{+2}$ H

∴ సమాధానం: **RESF**

ఉదా: BDFH, EHKJ, ——, KPUN, NTZP

సమాధానం: ఆయా అక్షరాల క్రమ సంఖ్యల మధ్య భేదాలను గమనిస్తే....

B	D	F	H
+3↓	+4↓	+5↓	+2↓
E	H	K	J
+3↓	+4↓	+5↓	+2↓
H	L	P	L
+3↓	+4↓	+5↓	+2↓
K	P	U	N
+3↓	+4↓	+5↓	+2↓
N	T	Z	P

∴ సమాధానం: HLPL

ఉదా: A, B, D, H, ——

సమాధానం: ఆయా అక్షరాల క్రమసంఖ్యలు 1, 2, 4, 8. కాబట్టి తర్వాత అక్షరం క్రమసంఖ్య 16. 16వ అక్షరం 'P'

∴ సమాధానం: **P**

ఉదా: X, L, F, ——.

సమాధానం: ఆయా అక్షరాల క్రమసంఖ్యలు .. 24, 12, 6. కాబట్టి తర్వాత అక్షరం క్రమసంఖ్య = 6/2 = 3.

3వ అక్షరం 'C' ∴ సమాధానం: సి

ఉదా: A, D, I, P, ——

సమాధానం: ఆయా అక్షరాల క్రమసంఖ్యలు.. 1, 4, 9, 16 ఇవి వరుస సహజ సంఖ్యల వర్గాలు. కాబట్టి తర్వాత క్రమసంఖ్య = 5^2 = 25; 25వ అక్షరం Y.

∴ సమాధానం: Y

ఉదా:

కింది వరుసలో తప్పిపోయిన అక్షరాలు కనుక్కోండి.

DIL, GLO, JOR, ——

ఎ) XAD బి) GJM

సి) MRU డి) PSV

D	I	L
+3↓	+3↓	+3↓
G	L	O
+3↓	+3↓	+3↓
J	O	R
+3↓	+3↓	+3↓
M	R	U

తర్వాత MRU రావాలి. ∴ **సమాధానం:** సి

ఉదా: కింది వాటిలో భిన్నమైందేదో కనుక్కోండి.

(గ్రూప్-I, 2002)

ఎ) FJQP బి) CGON

సి) HLTS డి) LPXW

సమాధానం: ప్రతి పదంలోని వరుస అక్షరాల క్రమసంఖ్యల మధ్య భేదాలను గమనిస్తే...

$F \xrightarrow{+4} J \xrightarrow{+7} Q \xrightarrow{-1} P$

$C \xrightarrow{+4} G \xrightarrow{+8} O \xrightarrow{-1} N$

$H \xrightarrow{+4} L \xrightarrow{+8} T \xrightarrow{-1} S$

$L \xrightarrow{+4} P \xrightarrow{+8} X \xrightarrow{-1} W$

కాబట్టి సమాధానం: ఎ

ఉదా: కింది ప్రశ్నార్థక స్థానంలో ఉండాల్సిన అక్షరం ఏది?

$\frac{C}{G}, \frac{M}{R}, \frac{D}{J}, \frac{O}{?}$

ఎ) V బి) S సి) T డి) M

(గ్రూప్-I ప్రిలిమ్స్, 2002)

సమాధానం: అక్షరాల క్రమ సంఖ్యల మధ్య భేదాలను గమనిస్తే...

$C \xrightarrow{+4} G, \quad M \xrightarrow{+5} R, \quad D \xrightarrow{+6} J$

కాబట్టి 'O' నుంచి 7 స్థానాలు ముందుకు వెళ్లాలి. అంటే $O \xrightarrow{+7} V$

∴ **సమాధానం:** ఎ

ఉదా: I, X , J, W, K, V, L---

ఇచ్చిన మిశ్రమ శ్రేణిలో ఇమిడి ఉన్న రెండు శ్రేణులను వేర్వేరుగా రాస్తే...

i) I, J, K, L ii) X, W, V, ——

రెండో శ్రేణిలో అక్షరాలను వ్యతిరేక దిశలో రాశారు.

∴ **సమాధానం:** U

ఉదా: B, F, J, P, ——

సమాధానం: ఈ అక్షరాలన్నీ అచ్చుల తర్వాత వెంటనే వచ్చే అక్షరాలు. అంటే..

$A \xrightarrow{+1} B, \; E \xrightarrow{+1} F, \; I \xrightarrow{+1} J, \; O \xrightarrow{+1} P$

కాబట్టి తర్వాత అక్షరం $U \xrightarrow{+1} V$

∴ **సమాధానం:** V

ఉదా: Z, D, H, ——, T

సమాధానం: ఈ అక్షరాలన్నీ అచ్చులకు వెంటనే ముందుండే అక్షరాలు. అంటే..

$A \xrightarrow{-1} Z,\ E \xrightarrow{-1} D,\ I \xrightarrow{-1} H,\ U \xrightarrow{-1} T$

కాబట్టి సమాధానం $O \xrightarrow{-1} N$

∴ **సమాధానం:** N

ఉదా: O, T, T, F, F, ——, S

సమాధానం: ఈ అక్షరాలన్నీ One, Two, Three, Four, Five, Six, Seven అనే పదాల్లోని మొదటి అక్షరాలు.

∴ **సమాధానం:** S

ఉదా: S, M, T, W, T, ——, S

సమాధానం: ఈ అక్షరాలన్నీ Sunday, Monday, Tuesday, Wednesday, Thursday, Firday, Saturdayల్లోని మొదటి అక్షరాలు.

∴ **సమాధానం:** F

ఉదా: J, F, M, A, M, ——, J.

సమాధానం: ఈ అక్షరాలన్నీ January, February, March, April, May, June, July పదాల్లోని మొదటి అక్షరాలు.

∴ **సమాధానం:** J

ఉదా: A, CD, GHI, ——, UVWXY



∴ **సమాధానం:** MNOP

ఉదా: కింది వాటిలో భిన్నమైందేది? **(గ్రూప్-I ప్రిలిమ్స్, 2003)**

ఎ) DGJM బి) TWZ

సి) FHKN డి) XADG

సమాధానం: ప్రతి పదంలోని వరుస అక్షరాల క్రమసంఖ్యల మధ్య భేదాలను గమనిస్తే..

$D \xrightarrow{+3} G \xrightarrow{+3} J \xrightarrow{+3} M$

$Q \xrightarrow{+3} T \xrightarrow{+3} W \xrightarrow{+3} Z$

$F \xrightarrow{+2} H \xrightarrow{+3} K \xrightarrow{+3} N$

$X \xrightarrow{+3} A \xrightarrow{+3} D \xrightarrow{+3} G$

∴ **సమాధానం:** సి

వర్డ్ అనాలజీ-1

ఈ అంశానికి పరిధి అంటూ లేదు. విశ్వంలోని ప్రతి అంశంపై కనీస అవగాహన ఉండాలి. ప్రతి రంగానికి, ప్రతి సబ్జెక్టుకు సంబంధించి అవగాహన ఉండాలి. దేశాలు, రాజధానులు, కరెన్సీ, రాష్ట్రాలు, దేశ అధ్యక్షులు, రాష్ట్రపతులు, ప్రధానమంత్రులు, వివిధ రకాల పనివాళ్లు, వాళ్లు చేసే పనులు, వాడే వస్తువులు, క్రీడలు, నాట్యాలు, వాటిలోని భాగాలు... ఇలా చెప్పుకుంటూ పోతే అనంతమైన అంశాలుంటాయి. ప్రతి వాటిపై కొంత పరిజ్ఞానం ఉండాలి. ఇందులో కొన్ని అంశాల గురించి పరిశీలిద్దాం.

● దేశాలు – రాజధానులు

1. ఇండియా : న్యూఢిల్లీ : : జపాన్ : ....

   ఎ) జకర్తా బి) టోక్యో

   సి) బీజింగ్ డి) కొలంబో

సమాధానం 'బి'

● ఇండియా రాజధాని న్యూఢిల్లీ. అదే విధంగా జపాన్ రాజధాని టోక్యో

2. ఇటలీ : రోమ్ : : ఫిన్‌లాండ్ : ....

   ఎ) హెల్సింకి బి) బ్రసెల్స్ సి) వియన్నా డి) పారిస్

సమాధానం 'ఎ'

● దేశాలు – కరెన్సీ

3. చైనా : యువాన్ : : బంగ్లాదేశ్ : ....

   ఎ) డాలర్ బి) రూపాయి సి) ఢాకా డి) టాకా

సమాధానం 'డి'

చైనా కరెన్సీ యువాన్. అదే విధంగా బంగ్లాదేశ్ కరెన్సీ టాకా.

4. అర్జెంటీనా : పెసో : : బ్రెజిల్ : ....

   ఎ) పెసో బి) పౌండు

   సి) రియల్ డి) రూపాయి

సమాధానం 'సి'

● దేశాలు – పర్వతశిఖరాలు

5. ఇండియా : నందాదేవి : : ....

ఎ) దవళగిరి : నేపాల్ బి) నేపాల్ : అన్నపూర్ణ

సి) మెక్ కిన్లీ : అలస్కా డి)మిన్యా కొంక : చైనా

సమాధానం 'బి'

ఇండియాలో ఉన్న పర్వతం నందాదేవి. ఆ విధంగా కింద ఉన్న నాలుగు సమాధానాలు సరైనవే, కానీ ప్రశ్నలో మొదట దేశం పేరు, ఆ తర్వాత పర్వతం పేరు ఇచ్చారు.

ఆ విధంగా నేపాల్ : అన్నపూర్ణ ఉంది. కాబట్టి సమాధానం (బి). ఒక వేళ ఎ, సి, డి ఆప్షన్‌లలో దేశం పేరు ముందు ఉన్నట్లైతే అవి కూడా సరైన సమాధానాలు అయ్యేవి. కాని అలా లేవు.

6. మజ్‌టాగ్ : చైనా : : దవళగిరి : ....

ఎ) నేపాల్ బి) ఇండియాసి) టిబెట్ డి) పాకిస్తాన్

సమాధానం 'ఎ'

● దేశాలు – అధికార గ్రంథాలు

7. బ్రిటన్ : బ్లూ బుక్ : : ఫ్రాన్స్ : ....

ఎ) గ్రే బుక్ బి) ఎల్లో బుక్ సి) వైట్ బుక్ డి) ఆరంజ్ బుక్

సమాధానం 'బి'

● దేశాల పాతపేర్లు ; కొత్త పేర్లు

8. మెసపటోమియా : ఇరాక్ : : పర్షియా : ....

ఎ) మయన్మార్ బి) శ్రీలంకా సి) పాకిస్తాన్ డి) ఇరాన్

సమాధానం 'డి'

● దేశాలు – అంతరిక్ష కేంద్రాలు

9. శ్రీహరికోట : ఇండియా : : ఒసాకి : ....

ఎ) ఇటలీ బి) చైనా

సి) జపాన్ డి) రష్యా

సమాధానం 'సి'

● వీటితో పాటు దేశాలు–ఎడారులు, దేశాలు– జాతీయ పుష్పాలు, దేశాలు–పార్లమెంటులు, నదులు, నది తీరాన గల నగరాలు, ముఖ్యమైన దర్శనీయ ప్రదేశాలు. వివిధ

దేశాలు–విమానాశ్రయాలు, మొదలైనవి క్షుణ్ణంగా తెలుసుకోవాలి. ఇంకా ప్రమాణాలు (Units)

10. కాలం : గంట : : దూరం : ....

ఎ) లీటరు బి) కిలోగ్రాం సి) నిమిషం డి) కిలోమీటరు

సమాధానం 'డి'

● పరికరాలు – కొలతలు (Instruments and Measurements)

11. భూకంప లేఖిని (Seismograph) : భూకంపాలు : : ఓడోమీటర్ : ....

ఎ) కాలం బి) దూరం సి) వేగం డి) పొడవు

సమాధానం 'సి'

● పనివాళ్ళు – వాళ్ళు వాడే వస్తువులు (Worker and Tool)

12. రచయిత : కలం : : దర్జీ : ....

ఎ) బట్ట బి) సూది

సి) కుట్టడం డి) పైవన్నీ

సమాధానం 'బి'

● పనివారు – వారి ఉత్పాదనలు (Workers and Products)

13. రచయిత : పుస్తకం : : నటుడు : ....

ఎ) సినిమా బి) నటించడం సి) గ్రంథం డి) హీరో

సమాధానం 'బి'

● ఉత్పత్తులు – ముడి సరుకులు (Products and Raw Materials)

14. గోడ : ఇటుక : : పుస్తకం : ....

ఎ) పెన్ను బి) కాగితం

సి) నవల డి) చదువు

సమాధానం 'బి'

● పనివారు – పనిచేసే స్థలం (Workers and Working place)

15. ఉపాధ్యాయుడు : పాఠశాల : : వైద్యుడు : ....

ఎ) హాస్పిటల్ బి) ఆటస్థలం సి) పొలం డి) ఆఫీస్

సమాధానం 'ఎ'

● పనిముట్లు వాటి చర్యలు (Tools and Actions)

16. పెన్ను : రాయడం : : కత్తి : ....

ఎ) ఇనుము బి) చాకు

సి) కోయడం డి) ఏదీ కాదు

సమాధానం 'సి'

● మగ – ఆడ (Male and Female)

17. కొడుకు : కూతురు : : అల్లుడు : ....

ఎ) అత్త బి) అమ్మ

సి) కూతురు డి) కోడలు

సమాధానం 'డి'

● వ్యక్తిగతం – తరగతి (Individual and Class)

18. మానవుడు : క్షీరదం : : పాము : ....

ఎ) ఉభయచరం బి) జంతువు సి) సరిస్పృపం డి) పక్షి

సమాధానం 'సి'

● కారణం – ఫలితం (Cause and Effect)

19. పరుగెత్తడం : అలసిపోవడం : : ....

ఎ) నడవడం : పరుగెత్తడం

బి) ఉపవాసం : ఆకలి

సి) మేక : జంతువు

డి) ఉపాధ్యాయుడు : విద్యార్థి

సమాధానం 'బి'

- (Study and Topic)

20. గ్రాఫాలజి : చేతి రాత : : లా : ....

ఎ) నేరాలు   బి) న్యాయం సి) చట్టం   డి) అవినీతి

సమాధానం 'బి'

- కాలం – వరుసక్రమం

(Time Sequence)

21. బుధవారం : గురువారం : : ఫిబ్రవరి : ....

ఎ) జనవరి   బి) ఫిబ్రవరి   సి) మార్చి   డి) ఏప్రిల్

సమాధానం 'సి'

22. మంగళవారం : సోమవారం : : ....

ఎ) శనివారం : బుధవారం

బి) శుక్రవారం : మంగళవారం

సి) మే : ఏప్రిల్

డి) జూలై : ఆగస్టు

సమాధానం 'సి'

- మొత్తం – అందులో కొంత భాగం

(Whole and Part)

23. శరీరం : కాళ్లు : : ....

ఎ) చేతులు : శరీరం   బి) కారు : స్టీరింగు

సి) హైదరాబాద్ : ఆంధ్రప్రదేశ్

డి) పైవన్నీ

సమాధానం 'బి'

- కొంతభాగం – మొత్తం

(Part and Whole)

24. ఆంధ్రప్రదేశ్ : భారతదేశం : : ....

ఎ) చెన్నై : తమిళనాడు

బి) ఆంధ్రప్రదేశ్ : నల్గొండ

సి) హైదరాబాద్ : అశోక్‌నగర్

డి) ఏదీకాదు

సమాధానం 'ఎ'

● కొంతభాగం – కొంతభాగం (Part and Part)

25. కాళ్లు : చేతులు : : ....

ఎ) ఆంధ్రప్రదేశ్ : చైనా

బి) స్కూటర్ : కారు

సి) హైదరాబాద్ : శ్రీకాకుళం

డి) ఎ, సి

సమాధానం 'సి'

● కాళ్లు, చేతులు మానవ శరీరంలో భాగాలు హైదరాబాద్, శ్రీకాకుళం ఆంధ్రప్రదేశ్‌లో భాగాలు వర్డ్ అనాలజీలో తరచుగా వచ్చే కొన్ని అంశాల గురించి చర్చించాం.

వర్డ్ అనాలజి అంటే కేవలం ఇప్పుడు ఇచ్చిన అంశాలే అని పొరపడకండి. వీటితో పాటు నిత్యజీవితంలో మనం చూస్తున్న ఎన్నో అంశాలు, మనకు ఎదురవుతున్న అంశాలు గురించి క్షుణ్ణంగా తెలుసుకోవాలి.

వీటిగురించి తెలుసుకోవాలి

దేశ బడ్జెట్, రైల్వే బడ్జెట్, రాష్ట్ర బడ్జెట్, వన్యమృగ సంరక్షణా కేంద్రాలు, జాతీయ పార్కులు, జిల్లాలు వాటి ముఖ్య పట్టణాలు, వివిధ పదాలు అర్థాలు, వ్యతిరేక పదాలు, ... ఇలా అవీ, ఇవీ అని కాదు దాదాపు సమస్త విషయాలపై అవగాహన కలిగి ఉండాలి.

వీటితో పాటు క్రీడలు, క్రీడాకారులు, నాట్యాలు, నృత్యకారులు (Dances), అవి ఏ ప్రాంతానికి సంబంధించినవి, మానవులలో వివిధ తెగలు, ఆ ప్రాంతాలు, భాషలు, నదులు మొదలగు వాటిపై పట్టు సాధించాలి.

ఇప్పటి వరకు ప్రస్తావించిన కొన్ని అంశాలలో, ప్రతి అంశానికి ఒకటి, రెండు ఉదాహరణలు మాత్రమే చెప్పుకున్నాం. ఆ అంశాలకు సంబం ధించి పూర్తి వివరాలు నేర్చుకోండి. సాధన చేయండి. విజయం మీదే. బెస్టాఫ్ లక్.

వర్డ్ అనాలజీ-2

వర్డ్ అనాలజీ

వర్డ్ అనాలజీలో కూడా ముందు రెండు పదాలు ఇస్తారు. ఈ పదాల మధ్య ఎలాంటి సంబంధం ఉందో కనుక్కొని, ప్రశ్నలో గల మూడో పదానికి, ఆప్షన్‌లలో గల ఏ పదంతో అలాంటి సంబంధం ఉందో కనుక్కొని, దాన్ని సమాధా నంగా గుర్తించాలి.

గతంలో వివిధ పోటీ పరీక్షల్లో వర్డ్ అనాలజీపై వస్తున్న ప్రశ్నలను పరిశీలించి, ఆయా పదాల మధ్య సంబంధాన్ని కింది విధంగా చెప్పుకోవచ్చు. అవి

- వ్యతిరేక పదాలు, సమాన అర్థాలు, దేశాలు – రాజధానులు, దేశాలు – కరెన్సీ, రాష్ట్రాలు – రాజధానులు, దేశ అధ్యక్షులు, రాష్ట్రపతులు, ప్రధాన మంత్రులు, వివిధ రకాల పనివాళ్లు, వారు చేసే పనులు, వారు వాడే వస్తువులు, వివిధ రకాల వస్తువులు, వాటిలోని భాగాలు.. ఇలా చెపుతూ పోతే ఎన్నో అంశాలు ఉంటాయి.

సౌర కుటుంబం:

1. చంద్రుడు : ఉపగ్రహం : : భూమి : ______

ఎ) సూర్యుడు　బి) గ్రహం

సి) సౌర కుటుంబం　డి) ఆస్టరాయిడ్

సమాధానం : (బి)

చంద్రుడు ఉపగ్రహమైతే, భూమి గ్రహం అవుతుంది.

2. సూర్యుడు : భూమి : : భూమి : ______

ఎ) గ్రహం　బి) ఉపగ్రహం

సి) చంద్రుడు　డి) సూర్యుడు

సమాధానం : (సి)

సూర్యుని చుట్టూ భూమి తిరుగుతుంది. అదే విధంగా భూమి చుట్టూ చంద్రుడు తిరుగుతాడు.

ప్రకృతి:

3. పువ్వు : మొగ్గ : : మొక్క : ______

(హోటల్ మేనేజ్‌మెంట్ 1996)

ఎ) విత్తనం　బి) రుచి

సి) పువ్వు డి) కొమ్మ

సమాధానం : (ఎ)

పువ్వుకు ముందు రూపం మొగ్గ అదే విధంగా మొక్కకు ముందు రూపం విత్తనం.

4. సముద్రం : నీరు : : హిమానీ నది : ____

(సెంట్రల్ ఎక్సైజ్ 1994)

ఎ) రిఫ్రిజిరేటర్ బి) మంచుగడ్డ

సి) పర్వతండి) గుహ

సమాధానం : (బి)

సముద్రంలో నీరు ఉంటుంది. అదే విధంగా హిమానీ నదిలో మంచుగడ్డ ఉంటుంది.

5. శిల్పి : శిల్పం : : కవి : ________

(అసిస్టెంట్ గ్రేడ్ 1994)

ఎ) కేన్వాస్ బి) కలం

సి) పద్యం డి) ఉలి

సమాధానం : (సి)

శిల్పి శిల్పాన్ని తయారుచేస్తాడు. అదే విధంగా కవి పద్యాన్ని రాస్తాడు.

ప్రమాణాలు (Units)

6. దూరం : కిలోమీటరు : : కాలం : _____

ఎ) గంటలుబి) సమయం

సి) గడియారం డి) పైవన్నీ

సమాధానం : (ఎ)

దూరం ప్రమాణం కిలోమీటరు అదే విధంగా కాలం ప్రమాణం గంట

పరికరాలు – కొలతలు

7. అమ్మీటర్ : కరెంట్ : : భూకంపలేఖిని : _____

ఎ) భూకంపాలు బి) సముద్ర లోతు

సి) వేగం డి) ఏదీ కాదు

సమాధానం : (ఎ)

అమ్మీటర్‌ను కరెంట్ కొలవడానికి ఉపయో గిస్తాం. అదే విధంగా భూకంపలేఖినిని భూకంపాల తీవ్రతను కొలవడానికి ఉప యోగిస్తాం.

జీవరాశి – వర్గీకరణ

8. మానవులు : క్షీరదాలు : : పాములు : ______

ఎ) క్షీరదాలు బి) ఉభయచరాలు

సి) సరీసృపాలు డి) పక్షులు

సమాధానం : (సి)

మానవులు క్షీరదాల జాతికి చెందిన జాతి. పాములు సరీసృపాలకు చెందినవి.

వస్తువులకు సంబంధించిన పోలిక:

9. ______ : కన్ను : : క్యాప్ : _____ : : ______ : పుస్తకం

(గ్రూప్-1 1983-84)

ఎ) కనురెప్ప, పెన్ను, కవర్

బి) కళ్లద్దాలు, ఉన్ని, కాగితం

సి) చూపు, తల, అక్షరాలు

డి) సాకెట్, తలపై చర్మం, చేతులు

సమాధానం : (ఎ)

కనురెప్ప కన్నును, క్యాప్ పెన్నును, కవర్ పుస్తకాన్ని కాపాడతాయి.

పనివాళ్లు–వారు వాడే వస్తువులు:

10. డాక్టర్ : స్కెతస్కోప్ : : రైతు : ______

ఎ) వ్యవసాయం బి) పంటలు

సి) ధాన్యం డి) నాగలి

సమాధానం : (డి)

డాక్టర్ వాడే వస్తువు స్కెతస్కోప్. అదే విధంగా రైతు వాడే వస్తువు నాగలి.

పనివారు–వారు పని చేసే స్థలం:

11. ఉపాధ్యాయుడు : పాఠశాల : : డాక్టర్ : ____

ఎ) వైద్యం బి) ఇల్లు

సి) హాస్పిటల్ డి) మందులు

సమాధానం : (సి)

ఉపాధ్యాయుడు పనిచేసే స్థలం పాఠశాల. అదే విధంగా డాక్టర్ పనిచేసే స్థలం హాస్పిటల్

పనివారు-వారి ఉత్పాదనలు:

12. ధర్జీ : చొక్కా : : రచయిత : ______

ఎ) పెన్ను బి) కాగితం

సి) నవల డి) పైవన్నీ

సమాధానం : (సి)

ధర్జీ చొక్కాను తయారుచేస్తాడు. అలాగే రచయిత నవలను తయారుచేస్తాడు. (రాస్తాడు).

వర్డ్ అనాలజీలో రావడానికి అవకాశం ఉన్న ప్రశ్నలు, గతంలో వచ్చిన ప్రశ్నలను పరిశీలించాం. వర్డ్ అనాలజీ అంటే ఇప్పటి వరకు చెప్పుకున్న అంశాలే కావు. జనరల్ స్టడీస్‌లో గల ఏ అంశం నుంచైనా వర్డ్ అనాలజీలో ప్రశ్న రావచ్చు.

మాదిరి ప్రశ్నలు

1. Engagement : Marriage : : _____ : ______ (గ్రూప్-1 2008 ప్రిలిమ్స్)

a) Talk : Exaggeration
b) Success : Failure
c) Explosion : Destruction
d) Boy : Man

2. Good : Excellent : : ______ : ______ (గ్రూప్-1 2008)

a) Hill : Mountain
b) Bad : Immoral
c) Jealousy : Respect
d) Caution : Careless

3. Liquor : Drink అనే పదాన్ని తెలిపే ఒక రకమైన సంబంధాన్ని, కింది జతల్లో, ఏ పదాలు తెలియజేస్తాయి?

(గ్రూప్-1 2008)

a) Tea : Beverage
b) Bread : Jam
c) Snuff : Inhale
d) Cloths : Beauty

4. ఒక డాక్టర్ కర్తవ్యం రోగాన్ని నయంచే యడం. అయితే ఒక అధికారి/షరీఫ్ దేనికి ప్రయత్నిస్తారు?

(గ్రూప్-1 2007)

ఎ) దొంగతనంబి) చట్టం

సి) నేరం డి) న్యాయం

5. పుస్తకం మొదట 'భూమిక' వస్తుంది. పుస్తకం చివరలో వచ్చేది?

(గ్రూప్-1 2007)

ఎ) తొలి దశబి) ఉపసంహారం

సి) ఉపోద్ఘాతండి) విషయసూచిక

6. ఆకుపచ్చ దీపం రాకపోకలలో, పోవడాన్ని సూచించడానికి గుర్తు. సైన్యంలో నక్షత్రాలు/ స్టార్లు దేన్ని సూచిస్తాయి? (గ్రూప్-1 2007)

ఎ) హోదాబి) సాహసం

సి) రక్షణ డి) అదృష్టం

7. చార్మినార్ హైదరాబాద్‌లో ఉంది. రాక్ గార్డెన్ ఎక్కడ ఉంది? (గ్రూప్-1 2007)

ఎ) అజ్మీర్బి) భోపాల్

సి) ఢిల్లీ డి) చండీగఢ్

8. Skin : Muscle : : Bone : _____

(గ్రూప్-1 1983-84)

a) Bloodb) Calcium

c) Marrowd) Veins

9. Letter : ______ : : _____ : Sentence (గ్రూప్-1 1983-84)

a) Mail, Words

b) Word, Phrase

c) Correspondence, Court

d) Alphabets, Words

10. _______ is to sentence as sentence is to _______

a) Crime, Judgement

b) Word, Paragraph

c) Jurry, Prose

d) Words, Legal

సమాధానాలు

1	సి	2	ఎ	3	ఎ	4	ఎ	5	బి
6	ఎ	7	డి	8	సి	9	బి	10	బి

నంబర్ అండ్ లెటర్ అనాలజి

మనం ఇంతకుముందు వర్డ్ అనాలజి గురించి చర్చించుకున్నాం. ఈ పాఠ్యాంశంలో ఆల్ఫాబెట్ అనాలజి, నెంబర్ అనాలజిల గురించి నేర్చుకుందాం. ఇవి గ్రూప్ 1 మెయిన్స్‌లోనూ, గ్రూప్ 2 జనరల్ స్టడీస్‌లోనూ తప్పకుండా వస్తున్న అంశాలు.

అల్ఫాబెట్ అనాలజి

ఈ విభాగంలో వచ్చే ప్రశ్నలు వేగంగా చేయాలంటే ఇంగ్లిష్ ఆల్ఫాబెట్ పై మంచి పట్టు సాధించాలి. ఈ కింది అంశాలపై సంపూర్ణ అవగాహన పెంచుకోవాలి.

- A నుంచి Z వరకు; Z నుంచి A వరకు వేగంగా చదవగలగాలి.
- A నుంచి Z వరకు వాటి స్థాన విలువలు (Position numbers) అంటే A-1, B-2, C-3, ... X-24, Y-25, Z-26 అని వెంటనే చెప్పగలగాలి.
- Z నుంచి A వరకు వాటి తిరోగమన స్థాన విలువలు (Position numbers in reverse order) అంటే Z-1, Y-2, X-3, ...C-24, B-25, A-26 అని వేగంగా చెప్పగలగా లి.
- ఇంగ్లిష్‌లో అచ్చులు (Vowels) A, E, I, O, Uలు నేర్చుకోవాలి.

ఇంగ్లిషు అక్షరాల స్థాన విలువలు సులభంగా నేర్చుకోవడం, గుర్తుంచుకోవడం గురించి లెటర్ సిరీస్ ఆర్టికల్‌లో ఉన్నాయి. ఆల్ఫాబెట్ అనాలజిలో ముందుగా ఒక జత అక్షరాల సమూహం ఇస్తారు. వాటి మధ్య ఉన్న సంబంధాన్ని కనుక్కొని, అదే సంబంధంతో ఉన్న మరో జత అక్షరాల సమూహాన్ని సమాధానంగా గుర్తించాలి.

కొన్ని ఉదాహరణలు

1) ABC : GHI : : MNO : ______

a) RST b) STU
c) TUV d) UVW

సమాధానం (b)

మొదటి గ్రూపు ABCలోని ప్రతి అక్షరం 6 స్థానాలు ముందుకు జరిగాయి.

A స్థానవిలువ 1; 1 + 6 = 7 = G

B స్థానవిలువ 2; 2 + 6 = 8 = H

C స్థానవిలువ 3; 3 + 6 = 9 = I

అదేవిధంగా MNOలోని ప్రతి అక్షరం 6 స్థానా లు ముందుకు జరగాలి.

M స్థానవిలువ 13; 13 + 6 = 19 = S

N స్థానవిలువ 14; 14 + 6 = 20 = T

O స్థానవిలువ 15; 15 + 6 = 21 = U

కావున సమాధానం STU

2) ACE : DFH : : PRT : ______

a) SUW b) VXZ

c) RTV d) UWY

సమాధానం (a)

మొదటి గ్రూపులోని ప్రతి అక్షరం 3 స్థానాలు ముందుకు జరిగాయి.

అదేవిధంగా PRTలో

P స్థానవిలువ 16, 16 + 3 = 19 = S

R స్థానవిలువ 18, 18 + 3 = 21 = U

T స్థానవిలువ 20, 20 + 3 = 23 = W

కావున సమాధానం SUW

3) RAT : QSZBSU : : HOT : ______

a) GIMNSU b) GINPRS

c) GINPSU d) GNIPUS

సమాధానం (c)

మొదటి గ్రూపు RAT పదంలోని ప్రతి అక్షరానికి బదులుగా దాని ముందు అక్షరం, తర్వాత అక్షరం రాశారు. Rను QSగా, Aను ZBగా, Tను SUగా రాశారు.

అదేవిధంగా HOT లోని Hను దాని ముందు అక్షరం G, తర్వాత అక్షరం Iగా అంటే Hను GIగా, Oను NPగా, Tను SUగా రాయాలి.

కావున సమాధానం GINPSU అవుతుంది.

4) AdE : aDe : : BeF : ______

a) BEF b) bEF

c) BEf d) bEf

సమాధానం (d)

మొదటి గ్రూపు AdE లోని పెద్ద అక్షరాలను చిన్న అక్షరాలుగా, చిన్న అక్షరాలను పెద్ద అక్షరాలుగా రాశారు.

అదేవిధంగా BeFను bEfగా రాయవచ్చు.

5) NPRT : MKIG : : ______ : ______

a) ACEG : ZXVT b) ACEG : ZWVT

c) ACFG : ZXVT d) ADEG : ZXVT

సమాధానం (a)

మొదటి గ్రూపు NPRT లోని ప్రతి అక్షరాన్ని తిరోగమన స్థానవిలువ ప్రకారం, ఆ అక్షరాన్ని రాశారు.

N స్థానవిలువ 14; తిరోగమన స్థానవిలువ
27 – 4 = 13

13వ అక్షరం M

P స్థానవిలువ 16; తిరోగమన స్థానవిలువ
27 – 16 = 11

11వ అక్షరం K

R స్థానవిలువ 18; తిరోగమన స్థానవిలువ
27 – 18 = 9

9వ అక్షరం I

T స్థానవిలువ 20; తిరోగమన స్థానవిలువ
27 – 20 = 7

7వ అక్షరం G

కావున NPRTను MKIGగా రాశారు.

అదేవిధంగా ACEGలో

A స్థానవిలువ 1; తిరోగమన స్థానవిలువ
27 – 1 = 26

26వ అక్షరం Z

C స్థానవిలువ 3; తిరోగమన స్థానవిలువ
27 – 3 = 24

24వ అక్షరం X

E స్థానవిలువ 5; తిరోగమన స్థానవిలువ
27 – 5 = 22

22వ అక్షరం V

G స్థానవిలువ 7; తిరోగమన స్థానవిలువ
27 – 7 = 20

20వ అక్షరం T

కావున సమాధానం ACEG : ZXVT అవుతుంది.

Note :

A నుంచి Z వరకు వాటి స్థానవిలువలు A-1, ...Z-26 అని నేర్చుకుంటే చాలు. తిరోగమన స్థానవిలువలు Z-1, ... A-26 అని నేర్చుకోవల్సిన అవసరం లేదు.

కాని తిరోగమన స్థానవిలువలు కావాలంటే 27 నుంచి ఆ అక్షరం అసలు స్థానవిలువను తీసివేస్తే వస్తుంది.

ఉదా :

A స్థానవిలువ 1, తిరోగమన స్థానవిలువ
27 – 1 = 26 అవుతుంది.
M స్థానవిలువ 13, తిరోగమన స్థానవిలువ
27 – 13 = 14 అవుతుంది.
T స్థానవిలువ 20, తిరోగమన స్థానవిలువ
27 – 20 = 7 అవుతుంది.

6) MNO : NPR : : ______ : ______

a) RST : SUW b) RST : SUV
c) RST : STU d) RST : TVX

సమాధానం (a)

మొదటి గ్రూపు MNOలో మొదటి అక్షరం ఒక స్థానం, రెండవ అక్షరం రెండు స్థానాలు, మూడవ అక్షరం మూడు స్థానాలు ముందుకు జరిగాయి.

M + 1 = 14 = N
N + 2 = 16 = P
O + 3 = 18 = R

అదేవిధంగా

RSTలో
R + 1 = 19 = S
S + 2 = 21 = U
T + 3 = 23 = W

కావున సమాధానం RST : SUW అవుతుంది.

7) IJK : KHM : : PQR : ______

a) ROT b) ROP
c) RST d) RTV

సమాధానం (a)

మొదటి గ్రూపు IJKలో మొదటి అక్షరం రెండు స్థానాలు, రెండో అక్షరం రెండు స్థానాలు వెనకకు, మూడో అక్షరం రెండు స్థానాలు ముందుకు

జరిగాయి.

I + 2 = 11 = K
J – 2 = 8 = H

K + 2 = 13 = M

అదేవిధంగా

P + 2 = 18 = R

Q – 2 = 15 = O

R + 2 = 20 = T

కావున సమాధానం ROT అవుతుంది.

8) EGIK : FILO : : FHJL : ______

a) GMJP b) GJMP

c) JGMP d) JGPM

సమాధానం (b)

మొదటి గ్రూపు EGIKలో మొదటి అక్షరం ఒక స్థానం, రెండో అక్షరం రెండు స్థానాలు, మూడో అక్షరం మూడు స్థానాలు, నాల్గో అక్షరం నాలుగు

స్థానాలు ముందుకు జరిగాయి.

అదేవిధంగా FHJLలో

F + 1 = 7 = G

H + 2 = 10 = J

J + 3 = 13 = M

L + 4 = 16 = P

కావున సమాధానం GJMP అవుతుంది.

9) LMNO : ONML : : PQRS : ______

a) QPSR b) RQPS

c) SRPQ d) SRQP

సమాధానం (d)

మొదటి గ్రూపులోని అక్షరాలను వెనక నుంచి రాశారు.LMNOను వెనక నుంచి అనగా ONMLగా రాశారు.అదేవిధంగాPQRSనుSRQPగా రాయవచ్చు.

కోడింగ్ అండ్ డీకోడింగ్-3

నంబర్ కోడింగ్

- ఇందులో ఆంగ్ల అక్షరాలను, నంబర్లను ఒకదానికి మరొకటి అన్వయిస్తూ ప్రశ్నలు ఇస్తారు. దిగువ విధంగా ఇవ్వవచ్చు.
- ఆంగ్లపదంలోని ఒక్కో అక్షరానికి వాటి స్థాన విలువలు (Position Numbers) (A–1, B–2, C–3,.............. Z–26) ఇవ్వవచ్చు లేదా ఆ అక్షరాల స్థాన విలువలకు 1, 2, 3 ...... కలుపుతూ (+) లేదా తీసివేస్తూ (–) ప్రశ్న అడగవచ్చు.
- ఆంగ్ల పదంలోని ఒక్కో అక్షరానికి తిరోగమన దిశలో వాటి స్థానవిలువలు (Position numbers in reverse order) (Z–1, Y–2, X–3, ...A–26) ఇవ్వడం కానీ, వాటికి ఏదైనా నంబర్లు కలుపుతూ లేదా తీసివేస్తూ ప్రశ్నలు ఇవ్వవచ్చు.
- ఆంగ్లపదంలోని అక్షరాల స్థాన విలువలు మొత్తం కలుపుతూ లేదా గుణిస్తూ కోడ్‌గా ఇవ్వవచ్చు. ఇలా కలుపుతూ/గుణిస్తూ వచ్చిన సంఖ్య నుంచి పదంలోని అక్షరాల సంఖ్యను కలపడం కానీ... తీసివేయడం కానీ... గుణించడం కానీ... భాగించడం కానీ చేయవచ్చు.

కొన్ని ఉదాహరణలు :

1. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో TREATMENTను 123415361గా రాస్తే, అదే భాషలో RENTను ఏ విధంగా రాస్తాం?

   a) 1234
   b) 2361
   c) 1261
   d) 2316

సమాధానం (b)

RENTలో ఉన్న అన్ని అక్షరాలు TREATMENTలో ఉన్నాయి. TREAT-MENTలో ఒక్కో

అక్షరాన్ని ఒక్కో కోడ్‌నంబర్‌తో సూచించడం జరిగింది.

TREA TMEN T
↓↓↓↓↓↓↓↓↓

12 3 4 1 5 3 6 1

అందువల్ల RENTను 2361గా రాస్తాం.

2. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో ని 19-1-11-19-8-9 చే సూచిస్తే NEWS ను ఏ

విధంగా రాస్తాం?

a) 14-5-23-19
b) 13-22-4-8
c) 19-1-11-19
d) 11-19-8-9

సమాధానం (a)

అనే పదంలోని అక్షరాల స్థానవిలువలు S-19, A-1, K-11, S-19, H-8, I-9

లను కోడ్‌గా రాయాలి. అదేవిధంగా NEWS రాస్తే N-14, E-5, W-23, S-19 అవుతుంది.

NEWS – 14 - 5 - 23 - 19

3. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో TEACHER ను 7-22-26-24-19-22-9గా రాస్తే అదే కోడ్

భాషలో STUDENT ని ఏ విధంగా రాస్తారు?

a) 19-20-21-4-5-14-20
b) 20-14-5-4-21-20-19
c) 8-7-6-23-22-13-7
d) 8-7-6-4-5-14-20

సమాధానం (c)

TEACHER అనే పదంలోని అక్షరాలను తిరోగమన దిశలో స్థానవిలువలు T-7, E-22, A-26, C-24, H-19, E-22, R-9లను కోడ్‌గా రూపొందించుకోవాలి. అలాగే STUDENTని రాస్తే S-8, T-7, U-6, D-23, E-22, N-13, T-7 అవుతుంది.

STUDENT – 8-7-6-23-22-13-7

4. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో SUPERను 79గా రాస్తే అదే కోడ్‌భాషలో EARLYని ఏ విధంగా రాస్తారు?

a) 79
b) 69
c) 65
d) 61

సమాధానం (d)

SUPER అనే పదంలోని అక్షరాల స్థానవిలువ మొత్తం 79.

SUPER = 19 + 21 + 16 + 5 + 18 = 79

అలాగే EARLY రాస్తే EARLY = 5 + 1 + 18 + 12 + 25 = 61 అవుతుంది.

5. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో RUNను 50గా రాస్తే అదే కోడ్‌భాషలో WALKను ఏ విధంగా రాస్తారు?

a) 47
b) 43
c) 51
d) 50

సమాధానం (b)

RUN అనే పదంలోని అక్షరాల స్థానవిలువల మొత్తం నుంచి అక్షరాల సంఖ్యను తీసివేస్తే 50

వస్తుంది.

RUN = 18 + 21 + 14 = 53,
53 - 3 = 50

అలాగే WALK = 23 + 1 + 12 + 11 = 47 అవుతుంది.
47 – 4 = 43

6. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో VICTORYని 16గా రాస్తే అదే కోడ్‌భాషలో HOTELను ఏ విధంగా రాస్తారు?

a) 12
b) 60
c) 55
d) 65

సమాధానం (a)

VICTORY అనే పదంలోని అక్షరాల స్థానవిలువలు అన్నీ కలిపి దానిని అక్షరాల సంఖ్యతో భాగించగా 16 వస్తుంది.

VICTORY = 22 + 9 + 3 + 20 + 15 + 18 + 25 = 112
112/7 = 16

అదేవిధంగా HOTEL = 8 + 15 + 20 + 5 +12 = 60
60/5 = 12

Substitution

ఇందులో ప్రతిపదాన్ని కోడ్ భాషలో మరొక పదంతో సూచించాలి. మనకు కావాల్సిన పదాన్ని ఈ కోడ్ భాషలో ఏ పదంతో సూచించారో మనం తెలుసుకోవాలి.

కొన్ని ఉదాహరణలు :

1. కాగితాన్ని పుస్తకంగా..., పుస్తకాన్ని పెన్నుగా..., పెన్నును బోర్డుగా..., బోర్డును తరగతి గదిగా పిలిస్తే,

మనం దేనితో రాస్తాం?

a) పుస్తకం

b) పెన్ను

c) బోర్డు

d) కాగితం

సమాధానం (c)

ఇలాంటి ప్రశ్నలు వచ్చినప్పుడు ముందుగా చివరలో ఉన్న ప్రశ్నకు మనకు తెలిసిన భాషలో సమాధానం కనుక్కోవాలి.

మనం దేనితో రాస్తాం? - పెన్ను

ఈ పెన్నును ఏమని పిలుస్తారో ఇచ్చిన వివరణల్లో పరిశీలించాలి. పెన్నును బోర్డుగా పిలుస్తారు అని ఉంది. కాబట్టి మనం బోర్డుతో రాస్తాం.

2. ఒకవేళ నీటిని నీలిరంగుగా..., నీలిరంగును ఎరుపుగా..., ఎరుపును తెలుపుగా..., తెలుపును ఆకాశంగా..., ఆకాశాన్ని వర్షంగా..., వర్షాన్ని ఆకుపచ్చరంగుగా..., ఆకుపచ్చరంగును గాలిగా పిలిస్తే, పాలు ఏ రంగులో ఉంటాయి.

a) ఆకాశం

b) తెలుపు

c) ఎరుపు

d) వర్షం

సమాధానం (a)

మనకు తెలిసిన భాషలో పాలు ఏ రంగులో ఉంటాయి?

– తెలుపు

తెలుపును ఆకాశంగా పిలుస్తారు.

కాబట్టి పాలు ఆకాశం రంగులో ఉంటాయి.

కోడింగ్ అండ్ డీ కోడింగ్-4

ఈ మోడల్‌లో రెండు, మూడు లేదా నాలుగు ఇంగ్లీషు వాక్యాలు ఇస్తారు. వాటిని సమానార్థకంగా కోడ్ భాషలో వాక్యాలు ఇస్తారు. తర్వాత ఇంగ్లీష్ వాక్యాలలోని ఏదో ఒక పదాన్ని, కోడ్ భాషలో దేనితో సూచిస్తారు అని ప్రశ్న అడుగుతారు.

ఇక్కడ ముఖ్యంగా గమనించాల్సిన విషయం ఇంగ్లీష్ వాక్య నిర్మాణం, కోడ్ భాష వాక్య నిర్మాణం ఒకే విధంగా ఉండదు. ఇంగ్లీష్‌లోని మొదటి పదాన్ని, కోడ్‌లోని మొదటి పదంగా భావించ రాదు. ఇక్కడ అడిగిన పదం, ఏయే వాక్యాలలో కామన్‌గా వచ్చిందో చూసి, ఆ వాక్యాలకు సంబం ధించిన కోడ్ వాక్యాలలో కామన్‌గా ఉన్న పదాన్ని తీసుకోవాలి.

ఉదాహరణలు

1. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో `Ra We Pa' అంటే `He is coming' ; `Pa Ta Me' అంటే `She is eating' అయితే ఆ కోడ్ భాషలో `is' ను ఏ పదంతో సూచిస్తాం?

   a) Ra   b) We
   c) Pa   d) Me

   సమాధానం : "c"

   `is' అనే పదం రెండు ఇంగ్లీష్ వాక్యాలలో కామన్‌గా వచ్చింది. ఈ రెండు వాక్యాలలో కూడా `is' మినహా వేరే ఏ పదం కూడా కామన్‌గా లేదు. కాబట్టి `is' కు సంబంధించిన కోడ్ కూడా ఆ రెండు కోడ్ వాక్యాలలో ఉంటుంది.

   రెండు కోడ్ వాక్యాలలో కామన్‌గా వచ్చిన పదం `Pa'. కాబట్టి `is' ను ఆ కోడ్ భాషలో `Pa' చే సూచిస్తాం.

2. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో `ni tim si' అంటే `how are you?' ; `ble ni si' అంటే

`where are you?' అయితే ఆ కోడ్ భాషలో `where' అనే పదాన్ని దేనితో సూచిస్తాం?

a) ble b) ni
c) si d) tim

సమాధానం : "a"

`where' అనే పదం రెండో వాక్యంలో ఉంది. రెండో వాక్యంలోని `where' మినహా మిగతా అన్ని పదాలు మొదటి వాక్యంలో ఉన్నాయి. కాబట్టి `where'కు సంబంధించిన కోడ్ రెండో కోడ్ వాక్యంలో ఉండాలి. అది మినహా మిగతా పదాలు అన్నీ మొదటి వాక్యంలో ఉంటాయి.

మొదటి వాక్యంలో లేకుండా కేవలం రెండో వాక్యంలో ఉన్న పదం `ble'. కాబట్టి `where' ను `ble' సూచిస్తుంది.

3. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో

`tee see pee' అంటే `Drink fruit juice'

`see kee lee' అంటే `Juice is sweet'

`lee ree mee' అంటే `He is intelligent'

అయితే ఈ కోడ్ భాషలో `Sweet'ను ఏ పదంతో సూచిస్తాం?

a) see b) kee
c) lee d) pee

సమాధానం : "b"

మొదటి, రెండో వాక్యాలలో కామన్‌గా ఉన్న పదం `Juice'. అదే విధంగా కామన్‌గా ఉన్న కోడ్ `see' కాబట్టి `Juice' ను `see' తో సూచిస్తాం.

రెండో, మూడో వాక్యాలలో కామన్‌గా ఉన్న పదం `is'. అదేవిధంగా కామన్‌గా ఉన్న కోడ్ `lee'. కాబట్టి `is' ను `lee' తో సూచిస్తాం.

రెండవ వాక్యంలోని `juice' ను `see' ను `is' ను `lee' తో సూచిస్తాం.

4. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో

`bi nie pie' అంటే `some good jokes'

`nie bat lik' అంటే `some real stories'

`pie lik tol' అంటే `many good stories'

అయితే అదే కోడ్ భాషలో `Jokes' అనే పదాన్ని దేనితో సూచిస్తారు?

a) bi b) nie

c) pie d) చెప్పలేం

సమాధానం : "a"

మొదటి, రెండో వాక్యాలలో కామన్‌గా ఉన్న పదం `some', కామన్‌గా ఉన్న కోడ్ `nie' అంటే `some' ను `nie' అనే కోడ్‌తో సూచిస్తాం.

మొదటి, మూడో వాక్యాలలో కామన్‌గా ఉన్న పదం `good'. కామన్‌గా ఉన్న కోడ్ `pie'.

కాబట్టి మొదటి వాక్యంలోని `some' ను `nie' తో, `good' ను `pie' తో సూచిస్తే మిగిలిన పదం `jokes' ను `bi' తో సూచిస్తాం.

5. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో '247' అంటే `spread red carpet', '256' అంటే `dust one carpet', '236' అంటే `one red carpet', అయితే ఆ కోడ్ భాషలో `dust' ను దేనితో సూచిస్తాం?

a) 2 b) 3
c) 5 d) 6

సమాధానం : "c"

మొదటి, రెండో వాక్యాలలో కామన్‌గా ఉన్న పదం `carpet', కామన్‌గా ఉన్న కోడ్ `2', `carpet' ను `2' తో సూచిస్తాం.

రెండో, మూడో వాక్యాలలో కామన్‌గా ఉన్న పదాలు `one carpet'; కామన్‌గా ఉన్న కోడ్‌లు 2,

6; `carpet code' '2' అని తెలుసు కాబట్టి `one code' '6' అవుతుంది.

'dust one carpet' లో మిగిలిన పదం `dust'. కాబట్టి `dust' కోడ్ '5' అవుతుంది.

6. ఒక కోడ్ భాషలో '479' అంటే `fruit is sweet', 248 అంటే `very sweet voice', 637 అంటే `eat fruit daily'. అయితే ఆ కోడ్ భాషలో is ను దేనితో సూచిస్తారు?

a) 7 b) 9

c) 4 d) చెప్పలేం

సమాధానం : "b"

మొదటి, రెండో వాక్యాలలో కామన్‌గా ఉన్న పదం `sweet', కామన్‌గా ఉన్న కోడ్ '4' కాబట్టి `sweet' ను 4 తో సూచిస్తాం.

మొదటి, మూడో వాక్యాలలో కామన్ ఉన్న పదం 'fruit', కామన్‌గా ఉన్న కోడ్ 7, కాబట్టి sweet ను '7' తో సూచిస్తాం.

మొదటి వాక్యంలో మిగిలిన పదం `is', కాబట్టి is ను '9' తో సూచిస్తాం.

7. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో '256' అంటే `red colour chalk'. '589' అంటే `green colour flower', 245 అంటే `white colour chalk' అయితే అదే కోడ్ భాషలో `white' ను ఏ అంకెచే సూచిస్తాం.

a) 2 b) 4

c) 5 d) 6

సమాధానం : "b"

మూడో వాక్యంలో white మినహా మిగతా అన్ని పదాలు మొదటి వాక్యంలో ఉన్నాయి. కాబట్టి `white'కు సంబంధించిన కోడ్ మినహా మిగతా అన్ని కోడ్‌లూ మొదటి దానిలో ఉంటాయి. మూడో వాక్యం కోడ్ 245 లో 2, 5 లు మొదటి కోడ్‌లో ఉన్నాయి. కాబట్టి `white' కోడ్ '4' అవుతుంది.

8. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో '157' అంటే `mother always affectionate', '619' అంటే

`always fortunate future', '952' అంటే `mother very fortunate' అయితే ఆ కోడ్ భాషలో `future' ను ఏ కోడ్ నెం. సూచిస్తాం?

a) 9 b) 6

c) 1 d) చెప్పలేం

సమాధానం : "b"

మొదటి, రెండో వాక్యంలో కామన్‌గా ఉన్న పదం `always', కామన్‌గా ఉన్న కోడ్ '1' కాబట్టి `always' ను '1' తో సూచిస్తాం. రెండో, మూడో వాక్యాలలో కామన్‌గా ఉన్న పదం `fortunate', కామన్‌గా ఉన్న కోడ్ 9.

రెండో వాక్యం `always fortunate future' లో `always code' '1' గా, `fortunate' కోడ్ '9' అని తెలిసింది. కాబట్టి మిగిలిన `future' కోడ్ '6' అవుతుంది.

9. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో '268' అంటే `equality and prosperity', '839' అంటే `prosperity nasty position' '361' అంటే `equality respected position' అయితే కోడ్ '2' ఏ పదాన్ని సూచిస్తుంది.

a) respected b) and
c) prosperity d) equality

సమాధానం : "b"

మొదటి కోడ్ '268' లో '2' మినహా 6,8 లు మూడో, రెండో వాక్యాలలో వచ్చాయి. కాబట్టి '2' మినహా 6, 8 ల అసలు పదాలు మూడో, రెండో వాక్యాలలో వస్తాయి. మొదటి వాక్యంలో ఉండి, మూడో, రెండో వాక్యాలలో లేని పదం `and' కాబట్టి కోడ్ '2' ను and సూచిస్తుంది.

10. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో '253' అంటే `books are old'. '546' అంటే `man is old', '378' అంటే `buy good books'. ఆ కోడ్ భాషలో are ను దేనితో సూచిస్తారు.

a) 2 b) 4

c) 5 d) 6

సమాధానం : "a"

`books are old' లోని `are' మినహా మిగతా రెండు పదాలు రెండో, మూడో వాక్యాలలో వచ్చాయి. అదే విధంగా దీని కోడ్ 253 లో '2' మినహా 5, 3 లు మిగతా రెండు వాక్యాలలో వచ్చాయి కావున `are' కోడ్ '2' అవుతుంది.

కోడింగ్ అండ్ డీకోడింగ్-5

ఏదైనా సమాచారాన్ని ఒక వ్యక్తి మరో వ్యక్తికి చేరవేయడానికి ఒక మాధ్యమం ఉండాలి. ఆమాధ్యమమే భాష. ప్రపంచవ్యాప్తంగా కొన్ని లక్షల భాషలు ఉన్నాయి.

కొన్ని సందర్భాల్లో ఒక సమాచారాన్ని రహస్యంగా మరొకరికి తెలియజేయాలంటే, ఆ భాష పక్కవారికి తెలియనిదై ఉండాలి. అలా అని ఎవరికీ తెలియని ఫ్రెంచ్, జపనీస్, రష్యన్ భాషలు నేర్చుకొని మాట్లాడినా, అది విన్న ఇతర వ్యక్తులు, తమ మిత్రుల ద్వారా దాని భావం తెలుసుకొనే అవకాశం ఉంది. ఎవరు ఎన్ని ప్రయత్నాలు చేసినా దాని భావం తెలుసు కోకుండా ఉండాలంటే వారు ఒక రహస్య భాష కనిపెట్టాలి. కాని ఇది సులువైన విషయం కాదు. ఒక కొత్త భాష తయారుచేయడానికి కొన్ని లక్షల పదాలు సృష్టించాలి. వాటిని గుర్తుంచుకోవాలి. వాక్య నిర్మాణాలు తయారు చేయాలి. మరెన్నో సమస్యలుంటాయి. కాబట్టి ఇదంతా కష్టసాధ్యం.

కానీ ఎవరికీ అర్థం కాకుండా సమాచా రాన్ని ఇతరులకు చేరవేయాలంటే, ప్రస్తుత ప్రపంచంలో ఉన్న లక్షలాది భాషల్లో ఏదో ఒక భాషే ఆధారం. దానికి స్వల్ప మార్పులు చేసి, ఆ మార్పులకనుగుణంగా మార్చాలి. దీన్ని 'కోడింగ్' అంటారు.

'కోడింగ్'లో ఉన్న పదాలను లేదా వాక్యా లను మనకు అర్థమయ్యే భాషలోకి మార్చడాన్ని 'డీకోడింగ్' అంటారు.

ఈ కోడింగ్ & డీకోడింగ్‌లను మిలటరీ, నౌకా, వాయుసేన, ఇతర రక్షణ దళాల్లో ఉప యోగిస్తున్నారు. అంతే కాకుండా వస్త్ర దుకాణ దారులు, ఇతర వ్యాపారులు కూడా ఈ కోడింగ్, డీకోడింగ్‌ను ఉపయోగిస్తారు. ఇటీవల కాలంలో నక్సలైట్లు, తీవ్రవాదులు కూడా దీన్ని వాడుతున్నారు.

రాష్ట్ర, జాతీయ స్థాయిల్లో జరిగే వివిధ పోటీ పరీక్షల్లో కోడింగ్, డీకోడింగ్‌లో ఆంగ్ల భాషను, అంకెలను ఆధారంగా చేసుకొని ప్రశ్నలు ఇస్తారు.

కోడింగ్, డీకోడింగ్ అంశంపై వివిధ మోడల్స్‌లో ప్రశ్నలు వస్తున్నాయి. వాటిని పరిశీలిద్దాం.

LETTER CODING

లెటర్ కోడింగ్‌లో అక్షరాలను, వేరే అక్షరాలతో సూచిస్తారు. ఇందులో అక్షరాలను తర్వాత అక్షరాలతో కానీ, దానికి ముందున్న అక్షరాలతో లేదా వాటికి ఏ మాత్రం సంబంధం లేని అక్షరాలతో సూచిస్తారు.

1. ఒక ప్రత్యేక భాషలో GOALను HPBMతో సూచిస్తే, అదే కోడ్ భాషలో REACHను దేనితో

సూచిస్తారు?

ఎ) QDZBG బి) SFBDI

సి) SFDEI డి) పైవన్నీ

సమాధానం : (బి)

GOAL అనే పదంలోని ప్రతి అక్షరాన్ని దాని తర్వాత అక్షరంతో సూచించారు.

G O AL
↓ ↓ ↓ ↓
H PB M

అదే విధంగా REA CH అనే పదంలోని ప్రతి అక్షరాన్ని తర్వాత అక్షరంతో సూచిస్తే Rను Sగా; Eను Fగా; Aను Bగా; Cను Dగా; Hను Iగా రాయాలి. అప్పుడు REACH అనే పదం కోడ్ 'SFBDI' అవుతుంది.

2. ఒక ప్రత్యేక కోడ్ భాషలో SIKKIMను THLJJLగా రాస్తే TRAININGని ఏ విధంగా రాస్తారు?

ఎ) SQBHOHOH

బి) UQBHOHOF

సి) UQBJOHHO

డి) UQBJOHOH

సమాధానం : (బి)

SIKKIM అనే పదంలోని మొదటి అక్షరం మొదలుకొని, ఒక దాని తర్వాత ఒక అక్షరం, ఒక స్థానం ముందుకు, ఒక స్థానం వెనుకకు జరుగుతున్నాయి.

H J L
↓ ↓ ↓
S I K K I M
↓ ↓ ↓
T L J

అదే విధంగా TRAINING అనే పదం లోని Tని Uగా, Rను Qగా, Aను Bగా, Iను Hగా, Nను Oగా, Iను Hగా, Nను Oగా, Gను Fగా రాస్తే.. UQBHOHOF అనేది సమాధానం అవుతుంది.

3. ఒక ప్రత్యేక కోడ్ భాషలో SIGMAను T K J Q Fగా రాస్తే అదే కోడ్ భాషలో OMEGAను ఏ విధంగా రాస్తారు?

ఎ) POHKF బి) PNFHB

సి) POGIC డి) ఏదీ కాదు.

సమాధానం: (ఎ)

SIGMA అనే పదంలోని మొదటి అక్షరం 'S' ఒక స్థానం, రెండో అక్షరం I రెండు స్థానాలు, మూడో అక్షరం 'G' మూడు స్థానాలు, నాల్గో అక్షరం M నాలుగు స్థానాలు, ఐదో అక్షరం 'A' ఐదు స్థానాలు ముందుకు జరిగాయి.

ఈ ప్రశ్నను ఇంకా సులభంగా చేయాలంటే ఈ అక్షరాల స్థాన విలువలు రాసి, వాటికి వరుసగా 1, 2, 3, 4, 5లు కలపగా కొత్తగా వచ్చే సంఖ్యల ఆధారంగా ఆ అక్షరాలు రాయాలి.

	S	I	G	M	A
వాటి స్థాన విలువలు	19	9	7	13	1
కలపాల్సిన సంఖ్యలు	1	2	3	4	5
కలపగా వచ్చిన కొత్త సంఖ్యలు	20	11	10	17	6
	↓	↓	↓	↓	↓
	T	K	J	Q	F

ఇదే విధంగా OMEGAను రాస్తే

	O	M	E	G	A
వాటి స్థాన విలువలు	15	13	5	7	1
కలపాల్సిన సంఖ్యలు	1	2	3	4	5
కలపగా వచ్చిన కొత్త సంఖ్యలు	16	15	8	11	6
	↓	↓	↓	↓	↓
	P	O	H	K	F

4. ఒక ప్రత్యేక కోడ్ భాషలో UPDATEను PUADETగా రాస్తే అదే కోడ్ భాషలో SERVICESను ఏ విధంగా రాస్తారు?

ఎ) TFSWJDFT బి) ESVRCISE

సి) SECIVRES డి) పైవన్నీ

సమాధానం: (బి)

ప్రతి రెండు అక్షరాలను తారుమారు చేస్తూ రాశారు.

5. ఒక ప్రత్యేక కోడ్ భాషలో ENGLISHను HSILGNEగా రాస్తే అదే కోడ్ భాషలో TELUGUను ఏ విధంగా రాస్తారు?

ఎ) WHOXJX బి) ETULUG

సి) UGULET డి) చెప్పలేం

సమాధానం: (సి)

ENGLISHలో ఉన్న అక్షరాలను రివర్స్ ఆర్డర్‌లో రాయడం వల్ల HSILGNE వచ్చింది. అదే విధంగా TELUGUను రివర్స్ ఆర్డర్‌లో రాస్తే UGULET వస్తుంది.

కోడింగ్, డీకోడింగ్ మీద వచ్చే ప్రశ్నలు చేయాలంటే కింది అంశాలపై పట్టు సాధించాలి

1. A నుంచి Z వరకు, Z నుంచి A వరకు వేగంగా చదవగలగాలి.
2. A నుంచి Z వరకు వాటి స్థాన విలువలు (position numbers) అంటే A–1, B–2, C–3, ... Y–25, Z–26 నేర్చుకోవాలి.
3. Z నుంచి A వరకు వాటి తిరోగమన స్థాన విలువలు (Reverse Position Numbers) అంటే Z–1, Y–2, X–3, ... B–25, A–26 తెలిసుండాలి.
4. A నుంచి Z వరకు వాటి తిరోగమన స్థాన అక్షరాలు (Reverse Position Letters) అంటే A తిరోగమన స్థాన అక్షరం Z, B తిరోగమన స్థాన అక్షరం Y, C–X, ... Y–B, Z–A తెలిసుండాలి.

   కూకట్‌పల్లి (KP) లేదా కొత్తపేట (KP) గుర్తుంచుకుంటే K తిరోగమన స్థాన అక్షరం P అని P తిరోగమన స్థాన అక్షరం K అని గుర్తుంచుకోవచ్చు.

   రెవెన్యూ ఇన్‌స్పెక్టర్ (RI) గుర్తుంచుకుంటే R తిరోగమన స్థాన అక్షరం I అని తెలుస్తుంది.

   ప్రపంచంలో అనవసరంగా, అత్యధిక పర్యాయాలు ఉపయోగించే పదం LOVE. ఈ పదాన్ని మననం చేసుకుంటే L తిరోగమన స్థాన అక్షరం O అని V తిరోగమన స్థాన అక్షరం E అని గుర్తుంచుకోవచ్చు.
5. ఆంగ్ల భాషలో అచ్చులు (Vowels) A, E, I, O, U తెలిసుండాలి.

గత పరీక్షల్లో వచ్చిన ప్రశ్నలు

1. ఒక విధమైన సంకేత భాషలో "TRIANGLE"ని "RSGBLHJF"గా రాస్తే, కింది వాటిలో ఏ పదానికి DFY TR అనేది సంకేత పదం అవుతుంది?

   (గ్రూప్-1, ప్రిలిమ్స్ 2008)

   ఎ) BEAST   బి) FEAST   సి) BOAST   డి) COAST

   సమాధానం: (బి)

   TRIANGLE అనే పదంలో మొదటి అక్షరం రెండు స్థానాలు వెనకకు, రెండో అక్షరం ఒక అక్షరం ముందుకు.... ఇలా చివరి వరకు ఒక దాని తర్వాత ఒకటి మారుతూ వచ్చాయి. అదే విధంగా రాస్తే FEAST సంకేత పదం DFYTR అవుతుంది.

2. GUPTAను సంకేత రూపంలో HVQ UBగా రాస్తే 'SHARMA'కు సము చిత సంకేతాన్ని ఎంపిక చేయండి?

(గ్రూప్-1 ప్రిలిమ్స్-2007)

ఎ) BNSBIT

బి) SBNBTI

సి) TIBSNB

డి) TBINBS

సమాధానం: (సి)

GUPTAలోని ప్రతి అక్ష రాన్ని తర్వాత అక్షరంతో సంకేతప రిచారు. అదే విధంగా SHARMA అనే పదంలోని ప్రతి అక్షరాన్ని తర్వాత అక్షరంతో సూచిస్తే TIBSNB అవు తుంది.

3. "PROMOTION"ను ఒక నిర్దిష్టమైన రహస్య భాషలో 'QSP89'గా రాస్తే అదే భాషలో DEMOTIONను ఎలా రాస్తారు?

(గ్రూప్ – 1 ప్రిలిమ్స్ 10.10.04)

ఎ) DE98 బి) EF98 సి) EF89 డి) EG89

సమాధానం: (సి)

PROMOTION అనే పదంలో మొదటి మూడు అక్షరాలు 'PRO'లు ఆ తర్వాత అక్షరంతో కోడ్ చేశారు. ఆ తర్వాత MOTION అనే అక్షరాల సమూహాన్ని 89గా కోడ్ చేశారు.

అదే విధంగా DEMOTIONలోని DEలను తర్వాత అక్షరాలైన EFతోను, MOTIONను 89తో సూచిస్తే 'EF89' సమాధానం అవుతుంది.

4 నుంచి 6వ ప్రశ్న వరకు సూచనలు:

XEROX COPY OF BILL WAS SENT అనే వాక్యాన్ని రహస్య భాషలో ZGTQZ EQRA QH DKNN YCU UGPV అని పేర్కొన్నారు. దీని ఆధారంగా కింది పదాలకు కోడ్ కనుక్కోండి?

(గ్రూప్ 2 – 2005)

4. WORD

ఎ) YPTF బి) YQTF

సి) YQSE డి) YQTE

5. BLIST

ఎ) DNKOV బి) DNKVQ

సి) DNKKU డి) DNKUV

6. CLOSE

ఎ) ENQUG బి) ENQVG

సి) EQNUG డి) ENOUG

సమాధానాలు: 4) బి 5) డి 6) ఎ

సూచనల్లో ఇచ్చిన ఆంగ్ల పదం, దీనికి సంబంధించిన కోడ్ పదాలను పరిశీలిస్తే ప్రతి అక్షరం రెండు స్థానాలు ముందుకు జరిగినట్లు తెలుస్తుంది.

కోడింగ్ అండ్ డీకోడింగ్-6

గత సంచికలో అక్షరాల శ్రేణులు (Letter Series) అనే అంశానికి సంబంధించిన ప్రాథమిక విషయా లు, కొన్ని ఉదాహరణలను చర్చించాం. ఈ సంచికలో ఇదే అంశానికి పొడిగింపుగా Coding-Decoding అనే అంశాన్ని చర్చిద్దాం. ఏదైనా ఒక సమాచారాన్ని 'A' అనే వ్యక్తి (Sender) నుంచి 'B' అనే వ్యక్తికి (Receiver) పంపించాలనుకుందాం. ఆ సమాచారాన్ని అత్యంత గోప్యంగా ఉంచాల్సిన అవసరం ఉందనుకొందాం. అంటే ఆ సమాచారా న్ని A, Bలు మినహా ఏ ఇతర వ్యక్తి కూడా అర్థం చేసుకోలేని విధంగా మార్చాలి. అంటే ఆ సమాచా రాన్ని 'A' అనే వ్యక్తి కోడింగ్ చేసి 'B' అనే వ్యక్తికి పంపిస్తాడు. 'B' అనే వ్యక్తి దాన్ని డీకోడింగ్ చేసి అసలైన సమాచారాన్ని రాబట్టుకుంటాడు. కోడింగ్, డీకోడింగ్‌కి సంబంధించిన సమస్యలను సాధించా లంటే అక్షరాల శ్రేణుల్లో మనం చర్చించిన మౌలిక విషయాలను మరోసారి మననం చేసుకోండి.

ఉదా: ఒక కోడ్ భాషలో 'PARTNER' అనే పదానికి కోడ్ 'OZQSMDQ' అయితే 'SEGMENT'కి కోడ్ ఏమిటి?

సమాధానం: మొదట మనం ఏ నియమం ప్రకారం 'PARTNER' అనే పదం 'OZQSMDQ'గా కోడ్ చేశారో గుర్తించాలి. అంటే దత్తాంశం లోని కోడింగ్ నియమాన్ని (Coding pattern) గుర్తించాలి. అదే నియమాన్ని అనుసరించి 'SEG MENT' అనే పదం కోడ్‌ను గుర్తించాలి.

P	A	R	T	N	E	R
−1↓	−1↓	−1↓	−1↓	−1↓	−1↓	−1↓
O	Z	Q	S	M	D	Q

అంటే PARTNER అనే పదంలోని ఆయా అక్షరాల నుంచి ఒక స్థానం వెనక్కి వెళ్లగా కోడ్ పదంలోని అక్షరాలు వచ్చాయి. ఇదే విధంగా

S	E	G	M	E	N	T
−1↓	−1↓	−1↓	−1↓	−1↓	−1↓	−1↓
R	D	F	L	D	M	S

∴ సమాధానం: RDFLDMS

ఉదా: ఒక కోడ్ భాషలో 'REJECTION'కి కోడ్ 'SGMIHZPWW' అయితే 'MECHANIC' కోడ్ ఏమిటి?

సమాధానం:

R	E	J	E	C	T	I	O	N
+1↓	+2↓	+3↓	+4↓	+5↓	+6↓	+7↓	+8↓	+9↓
S	G	M	I	H	Z	P	W	W

అంటే ఒక పదంలోని ఆయా అక్షరాల నుంచి వరుసగా 1, 2, 3, 4,... స్థానాలు ముందుకి వెళ్తే కోడ్ పదంలోని అక్షరాలు వచ్చాయి. ఇదే విధంగా

M	E	C	H	A	N	I	C
+1↓	+2↓	+3↓	+4↓	+5↓	+6↓	+7↓	+8↓
N	G	F	L	F	T	P	K

∴ **సమాధానం:** NGFLFTPK

ఉదా: 'PROMOTION' కోడ్ QSP89 అయితే 'DEMOTION' కోడ్ ఏమిటి?

(గ్రూప్–I, ప్రిలిమ్స్ – 2004)

సమాధానం:

P	R	O	M O T I O N
+1↓	+1↓	+1↓	↓
Q	S	P	89

ఇదే కోడింగ్ నియమాన్ని అనుసరించి

D	E	M O T I O N
+1↓	+1↓	↓
E	F	89

∴ **సమాధానం:** EF89

ఉదా: ఒక కోడ్ భాషలో 'SUMMER', 'RUNNER' అయితే 'WINTER' కోడ్ ఏమిటి?

(సివిల్స్, ప్రిలిమ్స్ – 2004)

సమాధానం:

S	U	M	M	E	R
–1↓	0↓	+1↓	+1↓	0↓	0↓
R	U	N	N	E	R

ఇదే విధంగా...

W	I	N	T	E	R
–1↓	0↓	+1↓	+1↓	0↓	0↓
V	I	O	U	E	R

∴ **సమాధానం:** VIOUER

ఉదా: 'SPHERE' అనే పదం కోడ్ 'EREHPS' అయితే 'CYLINDER' కోడ్ ఏమిటి?

సమాధానం: 'SPHERE' అనే పదంలోని అక్షరాలను వ్యతిరేక దిశలో రాస్తే దాని కోడ్ పదం 'EREHPS' ఏర్పడింది. ఇదే విధంగా 'CYLINDER' లోని అక్షరాలను వ్యతిరేక దిశలో రాస్తే 'REDNILYC'.

ఉదా: ఒక కోడ్ భాషలో 'PLAYER' కోడ్ 'AELPRY' అయితే 'COACH' కోడ్ ఏమిటి?

సమాధానం: 'PLAYER' అనే పదంలోని అక్షరాలను ఆంగ్ల అక్షరమాల వరుస (Alphabetical order) ప్రకారం అమర్చితే 'AELPRY' అనే పదం ఏర్పడింది. ఇదే విధంగా 'COACH'లోని అక్షరాలను Alphabetical orderలో అమర్చితే 'ACCHO' వస్తుంది.

∴ సమాధానం: ACCHO

ఉదా: 'HEALTH' కోడ్ 'GSKZDG' అయితే 'NORTH' కోడ్ ఏమిటి?

సమాధానం: 'HEALTH'లోని అక్షరాలను వ్యతిరేక దిశలో రాస్తే... 'HTLAEH' ఇప్పుడు

H	T	L	A	E	H
–1↓	-1↓	-1↓	-1↓	-1↓	-1↓
G	S	K	Z	D	G

ఇదే విధంగా 'NORTH'ని వ్యతిరేక దిశలో రాస్తే HTRON ఇప్పుడు

H	T	R	O	N
–1↓	-1↓	-1↓	-1↓	-1↓
G	S	Q	N	M

∴ సమాధానం : GSQNM

ఉదా: "DIFFERENT" కోడ్ 'FIDREFTNE' అయితే "SIMILARLY" కోడ్ ఏమిటి?

మొదట పదాన్ని మూడు సమాన భాగాలుగా విభజించాలి.

DIF FER ENT

1 2 3

ఆ తర్వాత ప్రతి భాగంలోని అక్షరాలను వ్యతిరేక దిశలో రాస్తే "FIDREFTNE" అనే కోడ్ వచ్చింది.

ఇదే విధంగా SIM ILA RLY కోడ్

1 2 3"

MISALIYLR" అవుతుంది.

ఉదా: 'DIFFICULT' కోడ్ 'FFIDITLUC' అయితే 'RADIANT' కోడ్ ఏమిటి?

సమాధానం: ఇచ్చిన పదంలోని మధ్య అక్షరం I. ఈ అక్షరాన్ని అలాగే ఉంచి, దీనికి ముందుండే అక్షరాలను (DIFF), తర్వాత ఉండే అక్షరాలను (CULT) వ్యతిరేక దిశలో రాస్తే 'FFIDI TLUC' అనే కోడ్ వచ్చింది. 'RADIANT' అనే అనే పదం కోడ్ 'DARITNA' అవుతుంది.

ఉదా: 'BREAKTHROUGH' కోడ్ 'EAOUG RBRGHKT' అయితే 'DISTRIBUTION' కోడ్ ఏమిటి?

సమాధానం: మొదట ఇచ్చిన పదాన్ని ఈ విధంగా '6' భాగాలుగా విభజించి ఆ భాగాల వరుసను మార్చితే కోడ్ పదం ఏర్పడుతుంది.

<u>BR</u> <u>EA</u> <u>KT</u> <u>HR</u> <u>OU</u> <u>GH</u>
1 2 3 4 5 6

<u>EA</u> <u>OU</u> <u>HR</u> <u>BR</u> <u>GH</u> <u>KT</u>
2 5 4 1 6 3

<u>DI</u> <u>ST</u> <u>RI</u> <u>BU</u> <u>TI</u> <u>ON</u>
1 2 3 4 5 6

<u>ST</u> <u>TI</u> <u>BU</u> <u>DI</u> <u>ON</u> <u>RI</u>
2 5 4 1 6 3

∴ **సమాధానం** : STTIBUDIONRI

ఉదా: 'CORPORATIONS' కోడ్ 'PROCTAROSNOI' అయితే 'JUDICIAL' కోడ్ ఏమిటి?

సమాధానం: ఇచ్చిన పదాన్ని ప్రతిభాగంలో '4' అక్షరాలు ఉండేటట్లుగా మూడు భాగాలుగా విభ జించి, ప్రతి భాగంలోని అక్షరాలను వ్యతిరేకదిశలో రాస్తే కోడ్ పదం ఏర్పడింది.

<u>CORP</u> <u>ORAT</u> <u>IONS</u> ....
1 2 3

<u>PROC</u> <u>TARO</u> S<u>NOI</u>

ఇదే విధంగా

<u>JUDI</u> <u>CIAL</u> <u>IDUJ LAIC</u>
1 2

∴ **సమాధానం** : IDUJLAIC

ఉదా: ఒక కోడ్ భాషలో 'TANK'కి కోడ్ 'SZOL', 'FRIEND'కి కోడ్ 'EQHFOE' అయితే

i) 'RING', 'FROG', 'ZENITH'ల కోడ్‌లు ఏమిటి?

ii) 'DEMAND', 'RATE' అనే పదాలు వేటికి కోడ్‌లు?

(Group - I, Model Paper - 2007)

సమాధానం: మొదట దత్తాంశం నుంచి కోడింగ్ నియమాన్ని కనుక్కోవాలి .

T	A	N	K	
−1↓	-1↓	+1↓	+1↓	అలాగే
S	Z	O	L	

F	R	I	E	N	D
−1↓	-1↓	-1↓	+1↓	+1↓	+1↓
E	Q	H	F	O	E

కోడింగ్ నియమం: ఇచ్చిన పదాన్ని రెండు సమాన భాగాలు చేసి మొదటి భాగంలోని అక్షరాల నుంచి ఒక స్థానం వెనక్కి, రెండో భాగంలోని అక్షరాల నుంచి ఒక స్థానం ముందుకి వెళ్తే కోడ్‌పదం ఏర్పడింది. ఇదే నియమం అనుసరించి...

R	I	N	G
−1↓	-1↓	+1↓	+1↓
Q	H	O	H

'RING' కి కోడ్ 'QHOH'

F	R	O	G
−1↓	-1↓	+1↓	+1↓
E	Q	P	H

∴ 'FROG'కి కోడ్ 'EQPH'

Z	E	N	I	T	H
−1↓	-1↓	-1↓	+1↓	+1↓	+1↓
Y	D	M	J	U	I

∴ 'ZENITH' కి కోడ్ 'YDMJUI

E	F	N	Z	M	C
−1↓	-1↓	-1↓	+1↓	+1↓	+1↓
D	E	M	A	N	D

∴ 'DEMAND' అనేది 'EFNZMC'

S	B	S	D
−1↓	-1↓	+1↓	+1↓
R	A	T	E

∴ 'RATE' అనేది 'SBSD' కి కోడ్

ఉదా: 'MACHINE' కోడ్ 19 – 7 – 9 – 14 – 15 – 20 – 11. అయితే DANGER కోడ్ ఏమిటి?

సమాధానం:

'MACHINE' లోని ఆయా అక్షరాల స్థాన విలువలు వరుసగా..13, 1, 3, 8, 9, 14, 5. ఈ స్థానవిలువలకు '6' కలిపి రాస్తే కోడ్ ఏర్పడింది. అంటే 19 – 7 – 9 – 14 – 15 – 20 – 11.

ఇదే విధంగా 'DANGER' పదంలోని అక్షరాల క్రమసంఖ్యలు వరుసగా 4, 1, 14, 7, 5, 18.

కాబట్టి కోడ్ 10-7-20-13-11-24.

ఉదా: 'RED'కి కోడ్ 6720, 'GREEN' కోడ్ 1677209 అయితే 'ORANGE' కోడ్ ఏమిటి?

సమాధానం:

'RED'లోని అక్షరాల స్థాన విలువలు.. 18, 5, 4. వీటికి '2' కలిపితే- 20, 7, 6. ఈ సంఖ్యల నుంచి '6720' అనే కోడ్ సంఖ్య వచ్చింది.

అలాగే 'GREEN'లోని అక్షరాల స్థాన విలువలు.. 7, 18, 5, 5, 14. వీటికి '2' కలిపితే- 9, 20, 7, 7, 16. ఈ సంఖ్యల నుంచి '1677209' అనే కోడ్ వచ్చింది. ఇదే విధంగా 'ORAN GE'లోని అక్షరాల స్థాన విలువలు.. 15,18,1, 14,7,5.

వీటికి '2' కలిపితే - 17, 20, 3, 16, 9, 7.

కాబట్టి 'ORANGE' కోడ్ '791632017'

కోడింగ్ అండ్ డీకోడింగ్-7

ఉదా: ఒక కోడ్ భాషలో CAT కోడ్ 24. DOG కోడ్ 26 అయితే COW కోడ్?

సమాధానం: 'CAT' పదంలోని అక్షరాల క్రమ సంఖ్యలు = 3, 1, 20

వీటి మొత్తం = 3 + 1 + 20 = 24

'DOG' పదంలోని అక్షరాల క్రమ సంఖ్యల మొత్తం = 4 + 15 + 7 = 26

ఇదే విధంగా 'COW' పదంలోని అక్షరాల క్రమ సంఖ్యల మొత్తం = 3 + 15 + 23 = 41

∴ **సమాధానం** : 41

ఉదా: 'CAT' కోడ్ 60, 'DOG' కోడ్ 420, అయితే COW కోడ్ ?

సమాధానం: 'CAT' లోని అక్షరాల క్రమ సంఖ్యల లబ్ధం = $3 \times 1 \times 20 = 60$

'DOG'లోని అక్షరాల క్రమ సంఖ్యల లబ్ధం = $4 \times 15 \times 7 = 420$

ఇదే విధంగా 'COW' పదంలో = $3 \times 15 \times 23 = 1035$

∴ **సమాధానం:** 1035

ఉదా: 'ACE' కోడ్ 81, BAD కోడ్ 49 అయితే ADD కోడ్ ?

సమాధానం: 'ACE'లోని అక్షరాల క్రమసంఖ్యలు = 1, 3, 5

వీటి మొత్తం వర్గం = $(1 + 3 + 5)^2 = 9^2 = 81$

'BAD'లోని అక్షరాల క్రమ సంఖ్యల మొత్తం వర్గం = $(2 + 1 + 4)^2 = 7^2 = 49$

ఇదే కోడింగ్ విధానం ప్రకారం ADD కోడ్ =

$(1 + 4 + 4)^2 = 9^2 = 81$

∴ **సమాధానం:** 81

ఉదా: 'ACE' కోడ్ 35, BAD కోడ్ 21 అయితే ADD కోడ్ ?

సమాధానం: 'ACE'లోని అక్షరాల క్రమ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తం

$= 1^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 9 + 25 = 35$

'BAD'లోని అక్షరాల క్రమసంఖ్యల వర్గాల మొత్తం

$= 2^2 + 1^2 + 4^2 = 4 + 1 + 16 = 21$

ఇదే విధానం ప్రకారం 'ADD' కోడ్ =

$1^2 + 4^2 + 4^2 = 1 + 16 + 16 = 33$

∴ సమాధానం: 33

ఉదా: 'ACE' కోడ్ 72, 'BAD' కోడ్ 74 అయితే CAT కోడ్ ?

సమాధానం: 'ACE'లోని అక్షరాల క్రమసంఖ్యలు వ్యతిరేక దిశలో

= 27 – 1, 27 – 3, 27 – 5

= 26, 24, 22

వీటి మొత్తం = 26 + 24 + 22 = 72

'BAD'లో = 27 – 2, 27 –1, 27 – 4

= 25, 26, 23

వీటి మొత్తం = 25 + 26 + 23 = 74

ఇదే విధంగా 'CAT' కోడ్

= (27 – 3) + (27 – 1) + (27 – 20)

= 24 + 26 + 7 = 57

∴ సమాధానం: 57

ఉదా: 'CRICKET' కోడ్ 3993252, 'ROCKET' కోడ్ 963252 అయితే 'PACKET' కోడ్ ?

సమాధానం: 'CRICKET'లోని అక్షరాల క్రమసంఖ్యలు = 3, 18, 9, 3, 11, 5, 20

క్రమసంఖ్యలో రెండంకెలు ఉంటే వాటి మొత్తాన్ని లెక్కించగా... 1+8 = 9, 1+1 = 2, 2+0 = 2

ఇప్పుడు వీటన్నింటినీ వరుసగా రాస్తే 3993252 అనే కోడ్ ఏర్పడింది.

'ROCKET'లోని అక్షరాల క్రమసంఖ్యలు =

18, 15, 3, 11, 5, 20 దీని కోడ్ = 963252

ఇదే విధానం ప్రకారం... PACKETలోని అక్షరాల క్రమసంఖ్యలు = 16, 1, 3, 11, 5, 20

∴ దీని కోడ్ = 713252

ఉదా: 'KNOWLEDGE' కోడ్ 81. 'INNOVATION' కోడ్ 100 అయితే 'INTERNATIONAL' కోడ్ ?

సమాధానం: 'KNOWLEDGE'లోని అక్షరాల సంఖ్య = 9 దీని వర్గం = 9^2 = 81

'INNOVATION'లోని అక్షరాల సంఖ్య వర్గం = 10^2 = 100

అలాగే 'INTERNATIONAL'లోని అక్షరాల సంఖ్య = 13 కాబట్టి దీని కోడ్ = 13^2 = 169

∴ సమాధానం: 169

ఉదా: TALL – ALL = 20 అయితే RATE – ATE = ?

సమాధానం: 'TALL'లో అక్షరాల క్రమసంఖ్యల మొత్తం నుంచి ALL పదంలోని అక్షరాల క్రమసంఖ్యల మొత్తాన్ని తీసివేస్తే =

(20 + 1 + 12 + 12) – (1 + 12 + 12) = 20

ఇదే విధానం ప్రకారం RATE – ATE

= (18 + 1 + 20 + 5) – (1 + 20 + 5) = 18

ఉదా: 'BUS' కోడ్ 126, 'LORRY' కోడ్ 440 అయితే 'TRAINS' కోడ్ ?

సమాధానం: 'BUS'లో అక్షరాల క్రమసంఖ్యల మొత్తం = 2 + 21 + 19 = 42

'BUS'లో అక్షరాల సంఖ్య = 3

∴ దీని కోడ్ = 42 × 3 = 126

'LORRY'లోని అక్షరాల క్రమసంఖ్యల మొత్తం =

12 + 15 + 18 + 18 + 25 = 88

'LORRY'లో అక్షరాల సంఖ్య = 5

∴ దీని కోడ్ = 88 × 5 = 440

అలాగే 'TRAINS' కోడ్

= (20 + 18 + 1 + 9 + 14 + 19)×6

= 81 × 6 = 486

∴ **సమాధానం:** 486

ఉదా: IS + WAS = 71 అయితే ARE + WERE = ?

సమాధానం: IS, WASల్లోని అక్షరాల క్రమ సంఖ్యల మొత్తం

= 9 + 19 + 23 + 1 + 19 = 71

ఇదే విధంగా ARE + WERE =

1 + 18 + 5 + 23 + 5 + 18 + 5 = 75

ఉదా: APPLE = 10, ORANGE = 12

అయితే PINEAPPLE = ?

సమాధానం: 'APPLE'లో అక్షరాల సంఖ్య = 5,

5 × 2 = 10

'ORANGE'లో అక్షరాల సంఖ్య = 6,

6 × 2 = 12

ఇదే విధంగా PINEAPPLE = 9 × 2 = 18

∴ **సమాధానం:** 18

ఉదా: CONTROL = 82, RUNNER = 58 అయితే HYDERABAD = ?

సమాధానం: 'CONTROL'లోని అక్షరాల క్రమసంఖ్యలు = 3, 15, 14, 20, 18, 15, 12 . రెండుసార్లు వచ్చిన 'O' అనే అక్షరం క్రమసంఖ్యను ఒకేసారి పరిగణించి అన్నింటినీ కూడితే...

3 + 15 + 14 + 20 + 18 + 12 = 82

'RUNNER'లోని అక్షరాల క్రమసంఖ్యలను కూడా పై విధంగా కూడితే... 18 + 21 + 14 + 5 = 58

ఇదే విధంగా HYDERABAD కోడ్ =

8 + 25 + 4 + 5 + 18 + 1 + 2 = 63

∴ **సమాధానం** = 63

ఉదా: ECONOMY = 30, HISTORY = 44 అయితే GEOGRAPHY = ?

సమాధానం: 'ECONOMY'లోని అక్షరాల క్రమసంఖ్యలు వరుసగా... 5, 3, 15, 14, 15, 13, 25. ఈ క్రమసంఖ్యల్లో ఒకట్ల (units place) స్థానంలో ఉన్న అంకెలను మాత్రమే కూడితే... 5 + 3 + 5 + 4 + 5 + 3 + 5 = 30

'HISTORY'లోని అక్షరాల క్రమసంఖ్యలు...

8, 9, 19, 20, 15, 18, 25

వీటిలో కూడా ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెలను మాత్రమే కూడితే... 8+9+9+0+5+8+5 = 44

'GEOGRAPHY'లోని అక్షరాల క్రమసంఖ్యలు వరుసగా... 7, 5, 15, 7, 18, 1, 16, 8, 25

పై కోడింగ్ విధానం ప్రకారం కోడ్ =

7 + 5 + 5 + 7 + 8 + 1 + 6 + 8 + 5 = 52

∴ **సమాధానం:** 52

ఉదా: MANGO = 20, PINEAPPLE = 44 అయితే ORANGE = ?

(**గ్రూప్-1 మెయిన్స్**, 2008)

సమాధానం: పై ప్రశ్నలోని కోడింగ్ విధానాన్నే ఈ ప్రశ్నకూ వర్తింపచేయొచ్చు. 'ORANGE' పదంలోని అక్షరాల క్రమసంఖ్యలు.. 15, 18, 1, 14, 7, 5. వీటిలో ఒకట్ల స్థానంలో ఉండే అంకెలను కూడితే... 5 + 8 + 1 + 4 + 7 + 5 = 30

∴ **సమాధానం** = 30

ఉదా: E=5, HOTEL=12 అయితే LAMB=?

సమాధానం: 'E' క్రమసంఖ్య = 5 = 5/1

'HOTEL'లోని అక్షరాల క్రమసంఖ్యల మొత్తం = 8 + 15 + 20 + 5 + 12 = 60

'HOTEL'లో అక్షరాల సంఖ్య = 5

∴ 60/5 = 12

ఇదే కోడింగ్ విధానం ప్రకారం 'LAMB'లోని అక్షరాలు క్రమసంఖ్యల మొత్తం = 12 + 1 + 13 + 2 = 28.

'LAMB'లోని అక్షరాల సంఖ్య = 4

∴ LAMB కోడ్ = 28/4 = 7

ఉదా: 'THURSDAY' కోడ్ VJWTUFCA అయితే 'JQPGUVA' దేనికి కోడ్ అవుతుంది?

(గ్రూప్-1 మెయిన్స్, 2008)

సమాధానం:

T	H	U	R	S	D	A	Y
+2↓	+2↓	+2↓	+2↓	+2↓	+2↓	+2↓	+2↓
V	J	W	T	U	F	C	A

అంటే ఇచ్చిన పదంలోని ప్రతి అక్షరం నుంచి '2' స్థానాలు ముందుకు వెళ్తే కోడ్ పదం ఏర్పడింది. కాబట్టి కోడ్ పదాన్ని డీకోడ్ చేయాలంటే ప్రతి అక్షరం నుంచి 2 స్థానాలు వెనక్కి వెళ్లాలి.

J	Q	P	G	U	V	A
−2↓	−2↓	−2↓	−2↓	−2↓	−2↓	−2↓
H	O	N	E	S	T	Y

∴ **సమాధానం:** HONESTY

ఉదా: REQUST = S2R52TU అయితే 'ACID'కి కోడ్ ?

∴ **సమాధానం:** 'REQUEST' కోడ్ పరిశీలిస్తే

$R \xrightarrow{+1} S,\ E \rightarrow 2,\ Q \xrightarrow{+1} R,\ U \rightarrow 5,$

$E \rightarrow 2,\ S \xrightarrow{+1} T,\ T \xrightarrow{+1} U$ గా కోడ్ చేశారు.

అంటే A, E, I, O, U అచ్చులు వరుసగా 1, 2, 3, 4, 5గా కోడ్ అయ్యాయి. హల్లులు వాటి తర్వాత అక్షరాలుగా కోడ్ చేశారు. కాబట్టి 'ACID' కోడ్...

$A \rightarrow 1,\ C \xrightarrow{+1} D,\ I \xrightarrow{+1} 3,\ D \xrightarrow{+1} E$

∴ **సమాధానం:** 1D3E

ఉదా: ఒక కోడ్ భాషలో 'LADY' కోడ్ B6A1B2A13 అయితే INDIA కోడ్?

(గ్రూప్-1 మెయిన్స్, 2008)

సమాధానం: 'LADY' కోడ్ పరిశీలిస్తే కింది కోడింగ్ విధానం అవగతమవుతుంది.

అక్షరం: A, B, C, D, E, F, G, H - - - W, X, Y, Z

కోడ్: A1, B1, A2, B2, A3, B3, A4, B4, --- A12, B12, A13, B13

('Z' కోడ్ : B13) * ఈ పట్టిక పూర్తిగా వేయండి.

కాబట్టి INDIA కోడ్ : A5B7B2A5A1.

ఉదా: RENT = 47, ROCKET = 32 అయితే CRICKET = ?

సమాధానం: 'RENT'లో హల్లుల క్రమసంఖ్యల మొత్తం నుంచి అచ్చుల క్రమసంఖ్యల మొత్తాన్ని తీసివేస్తే...

(18 + 14 + 20) – 5 = 52 – 5 = 47

ROCKETలో కూడా... (18 + 3 +11+ 20) – (15 + 5) = 52 – 20 = 32

కాబట్టి CRICKET కోడ్

= (3 + 18 + 3 + 11 + 20) – (9 + 5)

= 55 – 14 = 41

సమాధానం: 41

ఉదా: 'PARENT' కోడ్ BDFGJK, 'CHILDREN కోడ్ MOXQUFGJ అయితే 'REPRINT' కోడ్ ?

సమాధానం: ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని పరిశీలిస్తే ప్రత్యేకమైన కోడింగ్ విధానమంటూ ఏమీ లేదని స్పష్టమవుతోంది. ఇక్కడ ఒక అక్షరాన్ని ఇంకో అక్షరంగా కోడ్ చేశారు. ఈ రకమైన కోడింగ్‌ను "Direct Letter to Letter Coding" అంటారు. కాబట్టి REPRINT కోడ్ = FGBFXJK

సమాధానం: FGBFXJK

ఉదా: TWENTY = 863985, ELEVEN = 323039 అయితే TWELVE = ?

సమాధానం: ఇక్కడ కూడా Direct Letter to Letter Coding చేశారని అర్థం చేసుకోవచ్చు. అంటే

T →8, W → 6, E → 3, N → 9, Y → 5, L → 2, V → Oగా కోడ్ చేశారు.

కాబట్టి TWELVE = 863203

∴ **సమాధానం** : 863203

ఉదా: DICTIONARY = 1234256789 అయితే ORDINARY = ?

సమాధానం:

ఇక్కడ ఇచ్చిన పదంలోని ఆయా అక్ష రాలను దాని కోడ్ సంఖ్యలోని ఆయా అంకెలుగా వరుసగా కోడ్ చేశారని తెలుస్తోంది.

కాబట్టి 'ORDINARY' కోడ్ = 58126789

ఉదా: EARTH = QPMZS

అయితే HEART = ?

సమాధానం: SQPMZ

కోడింగ్ అండ్ డీకోడింగ్-1

ఒక సమావేశంలో ఉన్న వంద మంది సభ్యులలో ఎవరో ఒక వ్యక్తికి మాత్రమే అర్థమయ్యేలా ఒక విషయం చెప్పాలి అనుకున్నప్పుడు తెలుగు, హిందీ, ఇంగ్లీషు భాషలలో చెబితే పక్కవారు అర్థం చేసుకుంటారు. అలాఅని వారికి ఎవరికి తెలియని తమిళం, మళయాళం, ఫ్రెంచ్, రష్యన్ భాషలలో మాట్లాడినా ఆ వాక్యాలను అదేవిధంగా విని, ఆ భాషలు వచ్చిన తమ మిత్రుల ద్వారా తెలుసుకునే అవకాశం ఉంది. ఎన్ని ప్రయత్నాలు చేసినా వారు అర్థం చేసుకోకుండా ఉండాలంటే ఆ ఇద్దరు వ్యక్తులకు మాత్రమే తెలిసిన కొత్త భాషను సృష్టించాలి. ఇది సాధారణమైన విషయం కాదు.

ఒక భాష అంటే, లక్షలాది పదాలు సృష్టించాలి. అది అసాధ్యం. ఒకవేళ కష్టపడి సృష్టించినా గుర్తుంచుకోవడం కష్టసాధ్యం. మరెన్నో సమస్యలున్నాయి. ఎవరికీ అర్థం కాకుండా ఉండాలంటే ఏమి చేయాలి? ప్రస్తుతం ప్రపంచంలో ఉన్న ఏదో ఒక భాషను ఆధారం చేసుకొని, దానిని కొన్ని షరతులకు లోబడి మార్చడం, అలా మార్చడం వల్ల అది ఎవరికీ అర్థం కాదు. దీనిని 'కోడింగ్' అంటారు. ముందు చెప్పుకున్న ఆ షరతులకు లోబడి కోడింగ్‌లో ఉన్న ఆ పదాలను లేదా వాక్యాలను మనకు అర్థమయ్యే భాషలోకి మార్చుకోవాలి. దీనిని 'డీకోడింగ్' అంటారు.

సాధారణంగా ఏ.పి.పి.ఎస్సీ., యు.పి.ఎస్సీ, ఇతర కాంపిటీటివ్ పరీక్షలలో ఈ కోడింగ్, డీకోడింగ్ కోసం ఇంగ్లిష్ అక్షరాలను, అంకెలను ఆధారం చేసుకుంటారు.

కోడింగ్, డీకోడింగ్‌లలో మంచి మార్కులు సాధించాలంటే కింది అంశాల మీద పట్టు ఉండాలి.

1. A నుంచి Z వరకు, Z నుంచి A వరకు వేగంగా చదవగలగాలి.
2. A నుంచి Z వరకు వాటి స్థాన విలువలు (position numbers) అంటే A-1, B-2, C-3, ... X-24, Y-25, Z-26 అని వెంటనే చెప్పగలగాలి.
3. Z నుంచి A వరకు వాటి స్థాన విలువలు అంటే Z-1, Y-2, X-3, ... C-24, B-25, A-26 అని వెంటనే చెప్పగలగాలి.

4. Vowels A,E,I,O,U అని తెలిసుండాలి.
5. వేగంగా ఆలోచిస్తూ, త్వరగా నిర్ణయం తీసుకునే శక్తి ఉండాలి.

ఈ స్థాన విలువలు A నుంచి Z వరకు, Z నుంచి A వరకు సులభంగా గుర్తుంచుకొనే చిట్కాల గురించి గతంలో లెటర్ సీరిస్‌లో చర్చించాం.

పరీక్షలలో కోడింగ్, డీకోడింగ్ పలురకాలుగా వస్తున్నాయి. ఇప్పుడు వాటి గురించి చర్చిద్దాం.

Letter Coding

ఈ పద్ధతిలో అసలు అక్షరాలను కొన్ని షరతులకు లోబడి వేరే అక్షరాలతో సూచిస్తారు. అయితే ఆ అక్షరాలు ఏ షరతులకు లోబడి వేరే అక్షరాలుగా మారాయో గుర్తించి దాని ప్రకారమే ఇచ్చిన ప్రశ్నకు సమాధానం కనుక్కోవాలి.

కొన్ని ఉదాహరణలు :

1. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో VICTORY ని WJDUPSZ గా రాస్తే, అదే భాషలో SUCCESS ను ఏ విధంగా రాస్తాం?

a) RTBBDRR b) TVDDFTT
c) TVDDBRR d) RTBBFTT

'VICTORY' అనే పదంలోని ప్రతి అక్షరం ఒక స్థానం ముందుకు జరగడం వల్ల కోడ్ పదం వచ్చింది.

V I C T O R Y
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
W J D U P S Z

అదే విధంగా 'SUCCESS' అనే పదంలోని ప్రతి అక్షరాన్ని ఒక స్థానం ముందుకు జరిపితే సమాధానం వస్తుంది. ఇందులో S ను T గా, U ను V గా, C ను D గా, E ను F గా రాస్తే ..... 'SUCCESS' ను 'TVDDFTT' గా కోడ్ చేయవచ్చు. సమాధానం (b) అవుతుంది.

2. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో 'SHIVA' ని 'RGHUZ' గా రాస్తే 'ALLAH' ను ఏ విధంగా రాస్తాం?

a) ZKKZG
b) BMMBI
c) ZKKBI
d) BMMZG

SHIVA అనే పదంలోని ప్రతి అక్షరం ఒక స్థానం వెనకకు వెళ్ళటం వల్ల కోడ్ పదం వచ్చింది.

S H I V A
↓ ↓ ↓ ↓ ↓

R G H U Z

అదే విధంగా 'ALLAH' అనే పదంలోని ప్రతి అక్షరాన్ని ఒక స్థానం వెనకకు జరిపితే సమాధానం వస్తుంది. 'ALLAH' అనే పదంలోని A ను Z గా, L ను K గా, H ను G గా రాస్తే....

'ALLAH' ను 'ZKKZG' గా కోడ్ చేయవచ్చు. సమాధానం (a) అవుతుంది.

3. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో HYDERABAD ను IXEDSZCZE గా రాస్తే అదే కోడ్ భాషలో ASHOKNAGAR ను ఏ విధంగా రాస్తారు?

a) BTIPLOBHBS
b) ZRGNJMZHZR
c) BRINLMBFBQ
d) ZTGPJOZHZS

HYDERABAD అనే పదంలోని అన్ని అక్షరాలు ఒకదాని తర్వాత ఒక అక్షరం చొప్పున ఒక స్థానం ముందుకు, ఒక స్థానం వెనకకు వెళ్ళాయి.

+1-1+1-1+1 -1+1-1 +1
H Y D E R A B A D
↓↓↓↓↓↓↓↓↓

I X E D S Z C Z E

అదే విధంగా ASHOKNAGAR అనే పదంలోని అన్ని అక్షరాలు ఒకదాని తర్వాత ఒకటి చొప్పున

ఒక స్థానం ముందుకు, ఒక స్థానం వెనకకు వెళ్ళాలి.

'HYDERABAD' అనే పదంలోని మొదటి అక్షరం 'H' ఒక స్థానం ముందుకు వచ్చింది. అందువల్ల 'ASHOKNAGAR' లోని మొదటి అక్షరం ఒకస్థానం ముందుకు, తరువాత అక్షరం ఒక స్థానం వెనకకు వెళ్ళాలి.

+1 -1+1 -1+1 -1+1 -1 +1 -1
ASHOKNAGAR
↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓

BRINLMBFBQ

కాబట్టి 'ASHOKNAGAR' ను 'BRINLMBFBQ' గా రాయొచ్చు. కాబట్టి సమాధానం (c) అవుతుంది.

4. ఒక ప్రత్యేకమైన కోడ్ భాషలో 'HOUSE' ను 'IQXWJ' గా రాస్తే అదే కోడ్ భాషలో 'WINDOW' ను ఏ విధంగా రాస్తారు?

a) NKQHTC
b) XKQHTC
c) XKQGTC
d) XKQHTB

HOUSE లోని మొదటి అక్షరం ఒక స్థానం, రెండవ అక్షరం రెండు స్థానాలు, ... ఐదవ అక్షరం ఐదు స్థానాలు ముందుకు వెళ్ళింది. దీనిని సులభంగా చేయాలంటే ముందు ఈ పదంలోని అక్షరాలకు స్థానవిలువలు రాసి వాటికి వరుసగా 1, 2, 3, 4, 5లను కలిపితే కొత్త విలువలు వస్తాయి. వాటి ఆధారంగా ఆ అక్షరాలను తెలుసుకోవచ్చు.

వాటి స్థాన విలువలు

H O U S E

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

8 15 21 19 5

కలపాల్సిన సంఖ్యలు

1 2 3 4 5

కలిపితే వచ్చిన కొత్త సంఖ్యలు

9 17 24 23 10

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

I Q X W J

ఇదే విధంగా 'WINDOW' ను రాస్తే

వాటి స్థాన విలువలు

W I N D O W

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

23 9 14 4 15 23

కలపాల్సిన సంఖ్యలు

1 2 3 4 5 6

కలిపితే వచ్చిన కొత్త సంఖ్యలు

24 11 17 8 20 29

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

X K Q H T C

పై కోడ్ భాషలో 'WINDOW' ను 'XKQHTC' గా రాయొచ్చు.

గమనిక :

WINDOW లో చివరి అక్షరం 'W' స్థానవిలువ '23'. దీనికి '6' ను కలిపితే 29 వచ్చింది. కానీ ఆంగ్లంలో 29 అక్షరాలు లేవు. ఎప్పుడైనా ఇలాంటి సందర్భాలలో 26 కంటే ఎక్కువ వచ్చినప్పుడు దాని

నుంచి 26ను తీసివేయాలి. ఈ సందర్భంలో 29 నుంచి 26ను తీసివేయగా 3 వచ్చింది. కాబట్టి మూడవ అక్షరం C రాశాం. సాధారణంగా A నుంచి Z వరకు వాటి స్థాన విలువలను 1 నుంచి 26 వరకు తీసుకుంటాం. Z తర్వాత మళ్ళీ A వచ్చినప్పుడు దాని స్థాన విలువను 27గా, B ని 28గా C ని 29గా ... తీసుకుంటాం.

వర్గీకరణ పరీక్ష (Classification Test)

కుటుంబం గురించి కొంత అవగాహన కలిగి ఉండాలి. ఒకే జాతి లేదా లక్షణాలు కలిగిన కొన్ని అంశాల సముదాయమే కుటుంబం. ప్రపంచ వ్యాప్తంగా అనంతమైన కుటుంబాలు ఉన్నాయి. తల్లి, తండ్రి, వారి పిల్లలు ఒక కుటుంబం. హైదరాబాద్ వాసులు, ఆడవారు, మగవారు, ఉపాధ్యాయులు, డాక్టర్లు, సహజసంఖ్యలు, సరిసంఖ్యలు, బేసిసంఖ్యలు, 4 గుణిజాలు, 36 కారణాంకాలు ఇలా చెప్పుతూపోతే అనంతమైన కుటుంబాలు ఉన్నాయి. ప్రశ్నలో ఇచ్చిన నాలుగు ఆప్షన్‌లలో ఏది మిగతా వాటికి వేరుగా ఉందో కనుక్కోవాలి.

కొన్ని ఉదాహరణలు

కింద ఇచ్చిన నాలుగు ఐచ్ఛికాలలో మిగతా మూడిం టికన్నా వేరుగా ఉన్న దానిని గుర్తించండి.

1. ఎ) సెం.మీ బి) మీటరు
   సి) కిలోమీటరు డి) నాటికల్ మైలు

సమాధానం (డి)

పై నాలుగు కూడా దూరాన్ని కొలిచే ప్రమాణాలు కానీ ఎ, బి, సిలు భూమిపై దూరాన్ని కొలిచే ప్రమాణాలు (డి) నాటికల్ మైలు మాత్రం సముద్రంపై దూరం కొలవడానికి ప్రమాణం.

2. ఎ) స్త్రీ బి) బాలుడు సి) శిశువు డి) బాలిక

సమాధానం (సి)

శిశువు మినహా మిగతా మూడు పదాల లింగం చెప్పగలం.

3. ఎ) త్రిభుజం బి) చతురస్రం సి) వృత్తం డి) దీర్ఘచతురస్రం

సమాధానం (సి)

వృత్తం మినహా మిగతా మూడింటికీ కొన్ని భుజాలు ఉంటాయి.

4. ఎ) గోదావరి బి) గంగా
   సి) బ్రహ్మపుత్ర డి) సింధు

సమాధానం (ఎ)

గోదావరి మినహా మిగతా నదులు హిమానీ నదులు. గోదావరి మాత్రం ద్వీపకల్ప నది. **హిమానీ నదులు** : గంగా, సింధు, బ్రహ్మపుత్ర, యమున, గండక్, కోసి, చంబల్, సోన్.

ద్వీపకల్ప నదులు : మహానది, గోదావరి, కృష్ణ, తుంగభద్ర, కావేరి, పెన్నా, నాగావళి, మంజీర, ప్రాణహిత, డిండి, మూసీ.

5. ఎ) గంగా బి) గోదావరి సి) సింధు డి) మహానది ఇ) నర్మద

సమాధానం (ఇ)

నర్మద మినహా మిగతావన్నీ తూర్పువైపు ప్రవహించే నదులు. నర్మద మాత్రం పడమర వైపు ప్రవహించే నది.

పడమర వైపు ప్రవహించే నదులు : నర్మద, తపతి, సబర్మతి, మహి, మందావి, జూవారి, సారావతి, నీరావతి, పెరియార్, పంబా.

6. ఎ) గిర్ బి) సింధ్సి) మేవత్

డి) ముర్రా ఇ) ఒంగోలు

సమాధానం (డి)

ముర్రా మినహా మిగతావన్నీ ఆవు జాతులు. ముర్రా మాత్రం గేదె జాతి.

7. ఎ) గ్రాము బి) లీటరు సి) క్వింటాల్ డి) టన్ను ఇ) కిలోగ్రాం

సమాధానం (బి)

8. ఎ) ఇనుము బి) రాగిసి) వెండి

డి) జింక్ ఇ) పాదరసం

సమాధానం (ఇ)

పాదరసం మినహా మిగతావన్నీ ఘన లోహాలు. పాదరసం మాత్రం ద్రవరూప లోహం.

9. ఎ) అసోమ్ బి) అరుణాచల్ ప్రదేశ్ సి) నాగాలాండ్ డి) సిక్కిం

ఇ) మణిపూర్

సమాధానం (డి)

సిక్కిం మినహా మిగతావన్నీ సెవెన్ సిస్టర్స్ రాష్ట్రాలలో భాగం.

10. ఎ) శ్రీకాకుళం బి) నల్గొండ సి) మెదక్ డి) కడప

ఇ) గుంటూరు

సమాధానం (సి)

మెదక్ మినహా మిగతా జిల్లాల హెడ్ క్వార్టర్లు అదే పట్టణంలో ఉన్నాయి. మెదక్ హెడ్ క్వార్టర్ సంగారెడ్డి.

ఈ అంశంపై గతంలో వచ్చిన ప్రశ్నలు

1. ఎ) ఆరావళి కొండలు బి) శివాలిక్ కొండలు

సి) మోలె కొండలు డి) సాత్పూరాకొండలు ఇ) నీలగిరి కొండలు

సమాధానం (సి)

మోలె కొండలు మినహా మిగతావన్నీ భారత దేశంలో ఉన్నాయి.

2. ఎ) కింద బి) దగ్గర సి) పక్కన డి) పైన ఇ) ఎక్కడ

సమాధానం (ఇ)

'ఎక్కడ' మినహా మిగతావన్నీ 'ఎక్కడ' అనే ప్రశ్నకు సమాధానాలు.

3. ఎ) క్యారెట్ బి) ఆలుగడ్డ సి) అల్లం డి) క్యాబేజీ ఇ) బీట్‌రూట్

సమాధానం (డి)

క్యాబేజీ మినహా మిగతావన్నీ భూమి లోపల పెరిగేవి.

4. ఎ) క్యాలెండర్ బి) సంవత్సరం సి) నెల డి) వారం ఇ) రోజు

సమాధానం (ఎ)

క్యాలెండర్ మినహా మిగతావన్నీ క్యాలెండర్‌లో భాగాలు

5. ఎ) అమ్మ బి) స్నేహితుడు సి) సోదరి డి) నాన్న ఇ) సోదరుడు

సమాధానం (బి)

స్నేహితుడు మినహా మిగతా వారందరూ ఒకే కుటుంబానికి చెందినవారు.

6. ఎ) పాఠకుడు బి) రచయిత సి) ప్రింటర్ డి) పబ్లిషర్ ఇ) రిపోర్టర్

సమాధానం (ఎ)

పాఠకుడు మినహా మిగతావారందరూ ఒక జర్నల్ లేదా పత్రిక బయటకు రావడానికి వివిధ స్థాయిల్లో పని చేసేవారు

7. ఎ) బేరిపండు బి) క్యారెట్ సి) జామ
డి) టమాట ఇ) వంకాయ

సమాధానం (ఇ)

వంకాయ మినహా మిగతా వాటిని నేరుగా తినవచ్చు. వంకాయను వండిన తర్వాతనే తిన గలం.

8. ఎ) టేబుల్ బి) బీరువా సి) కుర్చీ డి) సోఫా ఇ) పేపర్ వెయిట్

సమాధానం (ఇ)

పేపర్ వెయిట్ మినహా మిగతావన్నీ గృహోపక రణాలు

9. ఎ) తాబేలు బి) బాతు సి) పాము
డి)తిమింగలం ఇ) కాకి

సమాధానం (డి)

తిమింగలం మినహా మిగతావన్నీ గుడ్లను పెడ తాయి.

10. ఎ) ఎక్స్‌రే బి) టెలిఫోన్ సి) రేడియో డి) కంప్యూటర్ ఇ) టెలివిజన్

సమాధానం (ఎ)

ఎక్స్‌రే మినహా మిగతావన్నీ ఎలక్ట్రానిక్ మీడియాకు చెందినవి.

నంబర్ క్లాసిఫికేషన్-1

ఈ సమస్యలు సులువుగా సాధించడానికి పాటించాల్సిన సూచనలు – సలహాలు

- మొదట అన్ని సంఖ్యలలో ఒకట్ల స్థానాన్ని పరిశీలించాలి. దీనివల్ల ఒక సంఖ్య మినహా మిగతావన్నీ సరి సంఖ్యలు లేదా బేసి సంఖ్యలు లేదా '5' గుణిజాలు లేదా 10 గుణిజాలు అని తెలుస్తుంది.
- ఒకట్ల స్థానంలో 0, 2, 4, 6, 8 లలో ఏదో ఒకటి ఉంటే అది సరి సంఖ్య, 1, 3, 5, 7, 9 లలో ఏదో ఒకటి ఉంటే అది బేసి సంఖ్య.

  ఒకట్ల స్థానంలో 0 గానీ 5 గానీ ఉంటే అవి '5' గుణిజాలు, ఒకట్ల స్థానంలో '0' మాత్రమే ఉంటే అవి '10' గుణిజాలు.

  ఇవన్నీ కూడా కేవలం ఒకట్ల స్థానం చూడడం వల్ల తెలుస్తుంది.
- మొదటి స్టెప్‌లో వేరుగా ఉన్న సంఖ్యను గుర్తించలేనపుడు, రెండో స్టెప్‌లో ప్రతి సంఖ్య లోని అంకెల మొత్తం కనుక్కోవాలి.

  దీని ద్వారా ఒక సంఖ్య మినహా మిగతా సంఖ్యలన్నీ 3 చేత గానీ, '9' చేత గానీ భాగించబడతాయో లేదో తెలుస్తుంది. ఒకవేళ ఏ సంఖ్య కూడా 3 చేత గానీ 9 చేత గానీ భాగించబడనప్పుడు, అన్ని సంఖ్యలలో అంకెల మొత్తం సమానంగా ఉండి, ఒక దానిలో మాత్రం వేరుగా ఉండవచ్చు.
- అన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు ఇచ్చి, ఒకటి సంయుక్త సంఖ్య ఇవ్వవచ్చు లేదా అన్ని సంయుక్త సంఖ్యలిచ్చి, ఒకటి ప్రధాన సంఖ్య ఇవ్వవచ్చు. కాబట్టి మీరు కనీసం 100 వరకు ప్రధాన సంఖ్యలను తెలుసుకోవాలి.
- అన్ని సంఖ్యలు కచ్చితమైన వర్గ సంఖ్యలు లేదా ఘన సంఖ్యలు ఇచ్చి ఒకటి వేరుగా ఇవ్వవచ్చు. లేదా ఏవైనా కొన్ని సంఖ్యల వర్గాలు లేదా ఘనాలకు అదే సంఖ్య గానీ, మరో స్థిర సంఖ్య గానీ కలపడం లేదా తీసివేస్తూ ఇచ్చి ఒకటి వేరుగా ఇవ్వవచ్చు.
- మీరు కనీసం 35 వరకు వర్గాలు, 11 వరకు ఘనాలు నేర్చుకోవాలి.

కొన్ని ఉదాహరణలు

1. ఎ) 124 బి) 132 సి) 248 డి) 631 ఇ) 596

   సమాధానం (డి)

   631 మినహా మిగతావన్నీ సరి సంఖ్యలు
2. ఎ) 593 బి) 471 సి) 894 డి) 699 ఇ) 347

   సమాధానం (సి)

   894 మినహా మిగతావన్నీ బేసి సంఖ్యలు.

3. ఎ) 575 బి) 497 సి) 370 డి) 685 ఇ) 740

సమాధానం (బి)

497 మినహా మిగతావన్నీ 5 గుణిజాలు

4. ఎ) 80 బి) 90 సి) 35 డి) 40 ఇ) 50

సమాధానం (సి)

35 మినహా మిగతావన్నీ 10 గుణిజాలు.

5. ఎ) 25 బి) 35 సి) 36 డి) 49 ఇ) 81

సమాధానం (బి)

35 మినహా మిగతావన్నీ కచ్చితమైన వర్గాలు

6. ఎ) 512 బి) 729 సి) 343 డి) 216 ఇ) 464

సమాధానం (ఇ)

464 మినహా మిగతావన్నీ కచ్చితమైన ఘనాలు

7. ఎ) 12 బి) 20 సి) 30 డి) 42 ఇ) 52

సమాధానం (ఇ)

52 మినహా మిగతావన్నీ కొన్ని సంఖ్యల వర్గాలకు అవే సంఖ్యలు కలిపారు.

$3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$

$4^2 + 4 = 16 + 4 = 20$

$5^2 + 5 = 25 + 5 = 30$

$6^2 + 6 = 36 + 6 = 42$

5^2 ను ఈ విధంగా రాయలేం

8. ఎ) 16 బి) 26 సి) 37 డి) 50 ఇ) 65

సమాధానం (ఎ)

16 మినహా మిగతావన్నీ కొన్ని సంఖ్యల వర్గాలకు ఒక స్థిర సంఖ్య '1' కలిపారు.

$5^2 + 1 = 25 + 1 = 26$

$6^2 + 1 = 36 + 1 = 37$

$7^2 + 1 = 49 + 1 = 50$

$8^2 + 1 = 64 + 1 = 65$

16 ను ఈ విధంగా రాయలేం

9. ఎ) 119 బి) 223 సి) 254 డి) 402 ఇ) 194

సమాధానం (డి)

402 మినహా మిగతా సంఖ్యలన్నీ, కొన్ని సంఖ్యల వర్గాల నుంచి ఒక స్థిర సంఖ్య '2' ను తీసివేయడం ద్వారా వచ్చాయి.

$11^2 - 2 = 121 - 2 = 119$

$15^2 - 2 = 225 - 2 = 223$

$16^2 - 2 = 256 - 2 = 254$

$14^2 - 2 = 196 - 2 = 194$

402 ను ఈ విధంగా రాయలేం.

10. ఎ) 11 బి)13 సి) 15డి) 17ఇ) 19

సమాధానం (సి)

15 మినహా మిగతావన్నీ ప్రధాన సంఖ్యలు.

నంబర్ క్లాసిఫికేషన్‌పై గతంలో వచ్చిన ప్రశ్నలు

1. ఎ) 43 బి) 53 సి) 63 డి) 73 ఇ) 83

సమాధానం (సి)

63 మినహా మిగతావన్నీ ప్రధాన సంఖ్యలు.

2. ఎ) 51 బి) 144 సి) 64 డి) 121 ఇ) 256

సమాధానం (ఎ)

51 మినహా మిగతావన్నీ కచ్చితమైన వర్గాలు.

3. ఎ) 6 బి) 12 సి) 18 డి) 9 ఇ) 7

సమాధానం (ఇ)

'7' మినహా మిగతావన్నీ సంయుక్త సంఖ్యలు. '7' మాత్రమే ప్రధాన సంఖ్య.

4. ఎ) 10 బి) 11 సి) 15డి) 16

సమాధానం (బి)

'11' మినహా మిగతావన్నీ సంయుక్త సంఖ్యలు. '11' మాత్రమే ప్రధాన సంఖ్య.

5. ఎ) 21 బి) 69 సి) 81డి) 83

సమాధానం (సి)

81 మాత్రమే కచ్చితమైన వర్గ సంఖ్య. మిగతావి కచ్చితమైన వర్గ సంఖ్యలు కావు.

6. ఎ) 9611 బి) 7324 సి) 2690 డి) 1754

సమాధానం (బి)

7324 మినహా మిగతా అన్ని సంఖ్యలలోని అంకెల మొత్తం 17కు సమానం అవుతుంది.

7. ఎ) 2345 బి) 3456 సి) 5467 డి) 5678

సమాధానం (సి)

5467 మినహా మిగతా సంఖ్యలలోని అంకెలన్నీ ఒక వరుసలో వచ్చాయి.

8. ఎ) 232 బి) 431 సి) 612 డి) 813

సమాధానం (డి)

813 మినహా మిగతా సంఖ్యలలోని అన్ని అంకెల లబ్దం '12' కు సమానం.

9. ఎ) 49 బి) 63 సి) 77డి) 81

సమాధానం (డి)

81 మినహా మిగతావన్నీ '7' చేత నిశ్శేషంగా భాగించబడతాయి.

నంబర్ క్లాసిఫికేషన్ -2

సంఖ్యలపై కనీస అవగాహన ఉంటే నంబర్ క్లాసిఫి కేషన్‌పై వచ్చే ప్రశ్నలను సులభంగా చేయొచ్చు. నంబర్ క్లాసిఫికేషన్‌పై దాదాపు అన్ని పోటీ పరీక్షల్లో ఒకటి లేదా రెండు ప్రశ్నలు వస్తున్నాయి.

ఈ ప్రశ్నలు వేగంగా చేయాలంటే వర్గ సంఖ్యలు 35 వరకు, ఘన సంఖ్యలు 11 వరకు, ప్రధాన సంఖ్యలు 100 వరకు వెంటనే చెప్పగల గాలి. వీటితో పాటు భాజనీయత సూత్రాలూ తెలిసి ఉండాలి. అప్పుడు మాత్రమే ఈ ప్రశ్నలు చేయగలుగుతాం.

నంబర్ క్లాసిఫికేషన్‌పై ప్రశ్నలకు సులువుగా సమాధానాలు రాయడానికి కింది పద్ధతులు పాటించాలి.

ముందుగా ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానం పరిశీలించాలి. దీనివల్ల సరి సంఖ్యలు, బేసి సంఖ్యల ఆధారంగా సమాధానం గుర్తించవచ్చు. మూడు సరి సంఖ్యలు ఇచ్చి, ఒక బేసి సంఖ్య ఇవ్వొచ్చు లేదా మూడు బేసి సంఖ్యలు ఇచ్చి ఒక సరిసంఖ్య ఇవ్వొచ్చు.

సరి సంఖ్యలు, బేసి సంఖ్యల ఆధారంగా సమాధానం గుర్తించలేనప్పుడు మళ్లీ ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న సంఖ్యను పరిశీలించాలి. దీనివల్ల 5 లేదా 10 గుణిజాల ఆధారంగా సమాధానం కనుక్కోవచ్చు. మూడు సంఖ్యలు 5 లేదా 10 గుణిజాలు ఇచ్చి ఒకటి వేరుగా ఇవ్వొచ్చు. అలా వేరుగా ఉన్నదే సమాధానం అవుతుంది.

ఒకవేళ ఒకట్ల స్థానం ఆధారంగా పైన చెప్పిన పద్ధతుల్లో సమాధానం గుర్తించలేనప్పుడు ఇచ్చిన సంఖ్యల్లోని అంకెల మొత్తం కనుక్కోవాలి. దీని ఆధారంగా 3 లేదా 9 గుణిజాల ఆధారంగా సమా ధానం కనుక్కోవచ్చు.

సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తం '3'తో నిశ్శేషంగా భాగాహారం చెందితే ఆ సంఖ్య 3తో ; సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తం 9తో భాగాహారం చెందితే ఆ సంఖ్య 9తో భాగితమవుతాయి.

కొన్ని సందర్భాల్లో 3 లేదా 9 గుణిజాల ఆధారంగా సమాధానం కనుక్కోలేక పోవచ్చు. కాని ఇచ్చిన నాలుగు ఆప్షన్లలో ఏవైనా మూడు ఆప్షన్లలో సంఖ్యల మొత్తం సమానంగా ఉండి ఒకటి వేరుగా ఉండొచ్చు. అలా వేరుగా ఉన్నదే సమాధానం అవుతుంది.

ఈ సందర్భంలో సమాధానం కనుక్కో లేకపోతే ఇతర సంఖ్యలైన 4, 6, 8, 11ల గుణిజాల ఆధారంగా సమస్యకు సాధన కనుక్కొనే ప్రయత్నం చేయాలి.

మొదటి, రెండో స్టెప్పుల్లో సమాధానం కనుక్కోలేకపోతే తర్వాత ప్రధాన సంఖ్యలు, వర్గ సంఖ్యలు, ఘన సంఖ్యలు ఆధారంగా సమస్యను పరిష్కరించవచ్చు. ఇవి కింది విధంగా ఇవ్వొచ్చు.

- మూడు ప్రధాన సంఖ్యలిచ్చి, ఒకటి సంయుక్త సంఖ్య ఇవ్వడం.
- మూడు సంయుక్త సంఖ్యలిచ్చి, ఒకటి ప్రధాన సంఖ్య ఇవ్వడం.
- ఇచ్చిన నాలుగు ఆప్షన్లలో, ప్రతి ఆప్షన్‌లోనూ ప్రధాన సంఖ్యలిచ్చి ఒకదానిలో మాత్రం వాటితో పాటు సంయుక్త సంఖ్య ఇవ్వడం.
- మూడు కచ్చితమైన వర్గ సంఖ్యలిచ్చి, ఒకటి కచ్చిత వర్గ సంఖ్య కానిది ఇవ్వడం.
- మూడు ఆప్షన్లలో వర్గ లేదా ఘన సంఖ్యలకు అవే సంఖ్యలు కలపడం వల్ల వచ్చే సంఖ్యలు ఇచ్చి, ఒకటి మాత్రం వీటితో సంబంధం లేకుండా ఇవ్వడం జరుగుతుంది.

నంబర్ క్లాసిఫికేషన్‌లో ప్రశ్నలు పైన చెప్పిన వివిధ పద్ధతుల్లో ఇవ్వవచ్చు. ఇవే కాకుండా మరికొన్ని ఇతర పద్ధతుల్లో కూడా ఇవ్వవచ్చు. కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

1. ఎ) 35 బి) 42సి) 76డి) 38

సమాధానం (ఎ)

35 మినహా మిగిలినవన్నీ సరి సంఖ్యలు.

2. ఎ) 47 బి) 29 సి) 56డి) 69

సమాధానం (సి)

56 మినహా మిగిలినవన్నీ బేసి సంఖ్యలు.

3. ఎ) 25 బి) 42 సి) 55డి) 75

సమాధానం (బి)

42 మినహా మిగిలినవన్నీ 5 గుణిజాలు

4. ఎ) 20 బి) 30 సి) 40డి) 55

సమాధానం (డి)

5. ఎ) 342 బి) 963 సి) 468 డి) 437

సమాధానం (డి)

ఈ ప్రశ్నలో ఒకట్ల స్థానం ఆధారంగా సమాధానం గుర్తించలేం. ఇందులో రెండు బేసి సంఖ్యలు, రెండు సరి సంఖ్యలు ఉన్నాయి. ఇప్పుడు ఈ సంఖ్యల్లోని అంకెల మొత్తం చూడటం వల్ల 3 లేదా 9 గుణిజాలు అవుతాయా? కావా? అనే విషయం తెలుస్తుంది.

మొదటి మూడు ఆప్షన్లలో అంకెల మొత్తం వరుసగా 9, 18, 18 వచ్చాయి. కాబట్టి మొదటి మూడు సంఖ్యలు 3, 9లతో నిశ్శే షంగా భాగితమవుతాయి. కాని ఆప్షన్ d లో అంకెల మొత్తం 14 అవుతుంది. 14 అనేది 3 లేదా 9ల్లో దేనితోనూ భాగితం కాదు కాబట్టి 437 కూడా 3 లేదా 9లతో భాగాహారం చెందదు.

6. 1) 33 2) 55 3) 66 4) 99

ఎ) 2బి) 3 సి) 2, 3

డి) ఏదీ కాదు

సమాధానం (సి)

పై నాలుగు సంఖ్యలు చూడగానే అవన్నీ 11 గుణిజాలని అర్థమవుతుంది. కాని 11 గుణిజాల ఆధారంగా ఆడ్‌మాన్ ఔట్ చేయలేం.

55 మినహా మిగిలినవన్నీ 3 గుణిజాలు. కాబట్టి 55 అనేది సమాధానం అవుతుంది.

మరో కోణంలో 66 మినహా మిగిలినవన్నీ బేసి సంఖ్యలు. కాబట్టి 66 అనేది సమాధానం అవుతుంది.

ఈ ప్రశ్నకు రెండు వేర్వేరు కోణాల్లో 55, 66 అనేవి సమాధానాలు అయ్యాయి. కాబట్టి 'పై రెండూ' అనేది సమాధానం అవుతుంది.

7. ఎ) 11,22 బి) 66,77

సి) 33,44 డి) 77,88

సమాధానం (బి)

ప్రతి ఆప్షన్‌లో రెండు సంఖ్యలున్నాయి. అవన్నీ కూడా 11 గుణిజాలే. ప్రతి జత మధ్య వ్యత్యాసం కూడా స్థిరంగా ఉంది. కాబట్టి దీన్ని మరో కోణంలో పరిశీలిస్తే (బి) 66,77 మినహా మిగిలిన అన్ని ఆప్షన్లలో మొదటి సంఖ్య బేసి సంఖ్య, రెండో సంఖ్య సరి సంఖ్యలుగా ఉన్నాయి.

8. ఎ) 25 బి) 64 సి) 71డి) 36

సమాధానం (సి)

71 మినహా మిగిలినవన్నీ కచ్చితమైన వర్గాలు.

9. ఎ) 42 బి) 30 సి) 110 డి) 122

సమాధానం (డి)

122 మినహా మిగిలినవన్నీ వర్గ సంఖ్యలకు అవే సంఖ్యలు కలపడం వల్ల వచ్చాయి.

62 + 6 = 42; 52 + 5 = 30; 102 + 10 = 110

10. ఎ) 3, 5, 11 బి) 7, 17, 19

సి) 5, 15, 17 డి) 11, 13, 17

సమాధానం (సి)

ప్రతి ఆప్షన్‌లో మూడు సంఖ్యలున్నాయి. ఆప్షన్ (సి) మినహా మిగిలిన ఆప్షన్‌ల్లో అన్నీ ప్రధాన సంఖ్యలే ఉన్నాయి. కాని (సి)లో ఉన్న '15' ప్రధాన సంఖ్య కాదు.

11. ఎ) 10 బి) 11సి) 15డి) 16

సమాధానం (బి)

11 మినహా మిగిలినవన్నీ సంయుక్త సంఖ్యలు.

12. ఎ) 2345 బి) 3456

సి) 5467 డి) 5678

సమాధానం (సి)

5467 మినహా మిగతా సంఖ్యల్లోని అంకెలన్నీ ఒక వరుస క్రమంలో వచ్చాయి.

గత పరీక్షల్లో వచ్చిన ప్రశ్నలు

1. సమిష్టి గుణాలు లేని జంట సంఖ్యలు ఈ కింది వాటిలో ఏవి? (గ్రూప్-1 2004)

ఎ) 34-43 బి) 62-71

సి) 55-62 డి) 83-92

సమాధానం (సి)

55-62లో మినహా మిగిలిన ప్రతి జత సంఖ్యల్లో వ్యత్యాసం '9'. కాని 55-62లో వ్యత్యాసం '7' మాత్రమే.

2. 441, 484, 529, 566, 625లలో ఒక సంఖ్య భిన్నమైంది. ఆ సంఖ్య ఏది?

(గ్రూప్-1 2003, జేఎల్స్ 2003)

ఎ) 484 బి) 529 సి) 625 డి) 566

సమాధానం (డి)

3. ఇందులో వైరుధ్యమున్న సంఖ్య?

(జేఎల్స్ 2004)

ఎ) 1 బి) 27 సి) 64 డి) 81

సమాధానం (డి)

81 మినహా మిగిలినవన్నీ కచ్చితమైన ఘన సంఖ్యలు.

81 ఘన సంఖ్య కాదు, వర్గ సంఖ్య మాత్రమే.

4. భిన్నమైన సంఖ్య ఏదో కనుక్కోండి.

(గెజిటెడ్ 2006)

ఎ) 9 బి) 25 సి) 36 డి) 48

సమాధానం (డి)

48 మినహా మిగిలినవి వర్గ సంఖ్యలు.

5. భిన్నమైన అంకె 1 సంఖ్య ఏదో కనుక్కోండి? (నాన్ గెజిటెడ్ 2005)

ఎ) 9 బి) 12 సి) 6 డి) 18

సమాధానం (ఎ)

9 మినహా మిగిలినవి సరి సంఖ్యలు.

లేదా

9 మినహా మిగిలినవన్నీ 6 గుణిజాలు.

వర్డ్ క్లాసిఫికేషన్ టెస్ట్

(పద వర్గీకరణ పరీక్ష)

గ్రూప్-1, 2, 4, సివిల్స్, ఇతర పోటీ పరీక్షల్లో పద వర్గీకరణ, సంఖ్యా వర్గీకరణలపై ప్రశ్నలు వస్తున్నాయి.

ఇందులో నాలుగు లేదా ఐదు పదాలు గాని, సంఖ్యలు గాని ఇస్తారు. అందులో ఒక పదం లేదా సంఖ్య మినహా మిగిలినవన్నీ ఒకే కుటుంబానికి చెంది ఉంటాయి. అంటే అవన్నీ ఏదో ఒక సారూప్య లక్షణాలను కలిగి ఉంటాయి. ఇందులో ఆ కుటుంబానికి చెందకుండా ప్రత్యేకంగా ఉన్న సంఖ్యను గానీ, పదాన్ని గానీ కనుక్కోవాలి.

ఒక పదం మినహా మిగిలినవన్నీ ఒకే కుటుంబానికి చెంది ఉంటాయి. కుటుంబం అనే పదాన్ని పరిశీలిస్తే ప్రపంచవ్యాప్తంగా ఎన్నో కుటుంబాలున్నాయి. ఉదాహరణకు భార్య, భర్త వారి పిల్లలు ఒక కుటుంబం. అదేవిధంగా భారతీ యులు, తెలుగువారు, మహిళలు, ఉపాధ్యాయులు, నిరుద్యోగులు, విద్యార్థులు... ఇలా ఎన్నో కుటుం బాలను చెప్పుకోవచ్చు.

ఉదాహరణలు

కింది వాటిలో వేరుగా ఉన్నదాన్ని గుర్తించండి.

1. ఎ) గులాబి బి) పద్మం
   సి) లిల్లీ డి) బంతి

   సమాధానం: (బి)

   పద్మం మినహా మిగతా మూడు భూమిపై పూసే పూలు.

   పద్మం మాత్రం నీటిలో పూసే పువ్వు.

2. ఎ) తుపాకి బి) ఫిరంగి
   సి) కత్తి డి) రైఫిల్

   సమాధానం: (సి) - కత్తి మినహా మిగతా మూడూ కాల్చే ఆయుధాలు

3. ఎ) లోక్‌సభ సభ్యులు
   బి) రాజ్యసభ సభ్యులు
   సి) ప్రధానమంత్రి డి) రాష్ట్రపతి

   సమాధానం: (డి)

   రాష్ట్రపతి మినహా మిగతా వారు పార్ల మెంట్‌లోని ఏదో ఒక సభలో సభ్యులు. రాష్ట్రపతి ఏ సభలోనూ సభ్యులు కారు.

4. ఎ) రోజుబి) గంట

సి) కాలం డి) నిమిషం

సమాధానం: (సి)

కాలం మినహా మిగతావన్నీ కాలానికి వివిధ ప్రమాణాలు.

5. ఎ) నర్మద బి) గోదావరి

సి) తపతి డి) పంబా

సమాధానం: (బి)

సాధారణంగా భారతదేశంలో నదులన్నీ తూర్పు వైపు ప్రవహిస్తాయి. కానీ కొన్ని నదులు మాత్రం పడమర వైపు ప్రవహిస్తాయి. పై వాటిలో గోదావరి తప్ప మిగతా నదులన్నీ పడమర వైపు ప్రవహిస్తాయి.

పడమర వైపు ప్రవహించే నదులు

నర్మద, తపతి, సబర్మతి, మహి, మాండవి, జువారి, శరావతి, నేత్రావతి, పెరియార్, పంబా మొదలైనవి.

6. ఎ) కృష్ణా బి) నల్గొండ

సి) మెదక్ డి) ప్రకాశం

సమాధానం: (బి)

నల్గొండ మినహా మిగతా జిల్లాల హెడ్‌క్వార్టర్లు అదే జిల్లాలో లేవు.

అదే పట్టణంలో హెడ్ క్వార్టర్ లేని జిల్లాలు

జిల్లాలు	హెడ్ క్వార్టర్
మెదక్	సంగారెడ్డి
రంగారెడ్డి	వికారాబాద్
తూర్పుగోదావరి	కాకినాడ
పశ్చిమగోదావరి	ఏలూరు
కృష్ణా	మచిలీపట్నం
ప్రకాశం	ఒంగోలు

7. ఎ) నీలం బి) ఆకుపచ్చ

సి) ఎరుపు డి) నలుపు

సమాధానం: (డి)

నలుపు మినహా మిగతా మూడు రంగులు నీలం, ఆకుపచ్చ, ఎరుపులను ప్రాథమిక రంగులు అంటారు.

8. ఎ) ఏప్రిల్ బి) జనవరి

సి) ఆగస్ట్ డి) అక్టోబర్

సమాధానం: (ఎ) – ఏప్రిల్‌లో మినహా మిగతా నెలల్లో 31 రోజులు ఉంటాయి.

31 రోజులుండే నెలలు

జనవరి, మార్చి, మే, జులై, ఆగస్ట్, అక్టోబర్, డిసెంబర్

30 రోజులుండే నెలలు

ఏప్రిల్, జూన్, సెప్టెంబర్, నవంబర్

గమనిక: ఫిబ్రవరి నెలలో సాధారణ సంవత్సరంలో 28 రోజులు, లీప్ సంవత్సరంలో 29 రోజులుంటాయి.

9. ఎ) చంద్రుడు బి) బుధుడు

సి) భూమి డి) శుక్రుడు

సమాధానం: (ఎ)

చంద్రుడు మినహా మిగతావన్నీ గ్రహాలు.

చంద్రుడు మాత్రం ఉపగ్రహం.

10. ఎ) ముంబై బి) కొచ్చిన్

సి) మైసూర్ డి) విశాఖపట్టణం

సమాధానం: (సి)

మైసూర్ మినహా మిగతావన్నీ ఓడ రేవులు.

11. ఎ) బీజ గణితం బి) త్రికోణమితి

సి) అంకగణితం డి) గణితశాస్త్రం

సమాధానం: (డి)

గణితశాస్త్రం మినహా మిగతావన్నీ గణితశాస్త్రంలోని వివిధ శాఖలు.

12. ఎ) హైదరాబాద్ బి) గోరక్‌పూర్

సి) గాంధీనగర్ డి) ఈటా నగర్

సమాధానం: (బి)

గోరక్‌పూర్ మినహా మిగిలినవన్నీ భారత దేశంలో గల వివిధ రాష్ట్రాల రాజధానులు.

13. ఎ) ఎక్స్‌రే బి) టెలిఫోన్

సి) రేడియో డి) దూరదర్శన్

సమాధానం: (ఎ)

ఎక్స్‌రే మినహా మిగిలినవన్నీ ఎలక్ట్రానిక్ మీడియాకు సంబంధించినవి.

14. ఎ) లక్నో బి) పాండిచ్చేరి

సి) లక్షద్వీప్ డి) చండీగఢ్

సమాధానం: (ఎ)

లక్నో మినహా మిగిలినవన్నీ కేంద్రపాలిత ప్రాంతాలు.

15. ఎ) పాఠకుడు బి) రచయిత

సి) ప్రింటర్ డి) పబ్లిషర్

సమాధానం: (ఎ) – పాఠకుడు మినహా మిగిలిన వారందరూ పుస్తకం తయారీలో వివిధ దశల్లో తమ సేవలు అందించేవారు.

16. ఎ) అమ్మ బి) నాన్న

సి) మిత్రుడు డి) సోదరుడు

సమాధానం: (సి)

మిత్రుడు మినహా మిగతా వారందరూ ఒకే కుటుంబానికి చెందినవారు.

17. ఎ) కింద బి) పక్కన

సి) పైన డి) ఎక్కడ

సమాధానం: (డి)

'ఎక్కడ' అనే పదం మినహా మిగిలిన పదాలన్నీ 'ఎక్కడ' అనే ప్రశ్నకు వివిధ సమాధానాలు.

18. ఎ) మంగోలియా బి) చైనా

సి) పాకిస్తాన్ డి) బంగ్లాదేశ్

సమాధానం: (ఎ)

మంగోలియా మినహా మిగిలిన దేశాలన్నీ భారతదేశానికి సరిహద్దు దేశాలు.

19. ఎ) పెన్ను బి) కాలిక్యులేటర్

సి) పెన్సిల్ డి) మార్కర్

సమాధానం: (బి)

కాలిక్యులేటర్ మినహా మిగిలినవన్నీ రాయడానికి ఉపయోగించే వస్తువులు.

20. ఎ) కిరోసిన్ బి) సన్‌ఫ్లవర్ నూనె

సి) డీజిల్ డి) పెట్రోల్

సమాధానం: (బి)

సన్‌ఫ్లవర్ నూనె మినహా మిగిలినవన్నీ ఇంధనాలు.

గత పరీక్షల్లో వచ్చిన ప్రశ్నలు

కింది వాటిలో ఏది సదృశ్య ఎన్నికకు భిన్నం?

1. ఎ) ఇండియన్ ఎక్స్‌ప్రెస్ (గ్రూప్-1 2007)

బి) ఇండియా టుడే

సి) టైమ్స్ ఆఫ్ ఇండియా

డి) ది హిందూ

సమాధానం : బి

ఇండియా టుడే మినహా మిగిలినవన్నీ ఆంగ్ల దినపత్రికలు.

2. ఎ) ఫ్లాట్ (గ్రూప్-1 1995)

బి) అపార్ట్‌మెంట్‌సి) గ్యారేజీ

డి) క్వార్టర్

సమాధానం : సి

3. ఎ) హితం (గ్రూప్-1 1995)

బి) సలహాసి) సూచన

డి) ఆదేశం

సమాధానం : డి

4. ఎ) వృత్తం (గ్రూప్-1 1990-91)

బి) చతురస్రంసి) దీర్ఘచతురస్రం

డి) త్రిభుజం

సమాధానం : ఎ

5. ఎ) యాదగిరి గుట్ట (గ్రూప్-2 2001)

బి) సింహాచలంసి) మంగళగిరి

డి) వేములవాడ

సమాధానం : డి

వేములవాడ మినహా మిగిలిన మూడు పట్టణాల్లో లక్ష్మీనర్సింహస్వామి కొలువై ఉన్నాడు. వేములవాడలో మాత్రం శ్రీ రాజరాజేశ్వరి కొలువై ఉంది.

6. ఎ) వంట బొగ్గు (జె.ఎల్స్ 2004)

బి) గ్రాఫైట్‌సి) బంగారం

డి) వజ్రం

సమాధానం : సి - బంగారం మినహా మిగిలినవన్నీ కార్బన్ రూపాంతరాలు.

7. ఎ) చంద్రగుప్తమౌర్యుడు (జె.ఎల్స్ 2001)

బి) బిందుసారుడుసి) అశోకుడు

డి) కనిష్కుడు

సమాధానం : డి

కనిష్కుడు మినహా మిగిలిన వారు మౌర్య సామ్రాజ్యంలో గొప్ప రాజులు. కనిష్కుడు మాత్రం

కుషాణుల్లో గొప్ప రాజు.

8. ఎ) రత్నావళి (జె.ఎల్స్ 2001)

బి) ప్రియదర్శికసి) కాదంబరి

డి) నాగానందం

సమాధానం : సి

కాదంబరి మినహా మిగిలినవి హర్షుని రచనలు. కాదంబరి రచయిత బాణుడు.

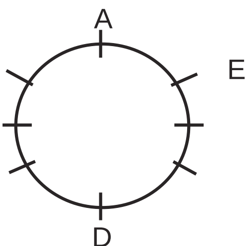
సీటింగ్ అరేంజ్‌మెంట్-2

గత సంచికలో సీటింగ్ ఏర్పాట్ల గురించి మౌలిక అంశాలు చర్చించి, కొన్ని ఉదాహరణలు కూడా చూశాం. ఈ సంచికలో సీటింగ్ ఏర్పాట్లకు సంబంధించిన మరికొన్ని సమస్యలను సాధిద్దాం.

ఉదాహరణ: A, B, C, D అనే నలుగురు బాలురు E, F, G, H అనే నలుగురు బాలికలు ఒక వృత్తాకార బల్ల చుట్టూ కూర్చున్నారు. అయితే ఏ ఇద్దరు బాలికలూ పక్కపక్కన కూర్చోలేదు. 'A'అనే బాలుడు 'E' అనే బాలికకు కుడి వైపున, 'D' అనే బాలుడికి ఎదురుగా కూర్చున్నాడు. 'F' అనే బాలిక 'B' అనే బాలుడికి ఎడమవైపు కూర్చుంది. 'G' అనే బాలిక 'C' అనే బాలుడికి ఎడమ వైపు కూర్చుంది కాని 'D' అనే బాలుడి పక్కన కూర్చోలేదు. అయితే ఈ కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.

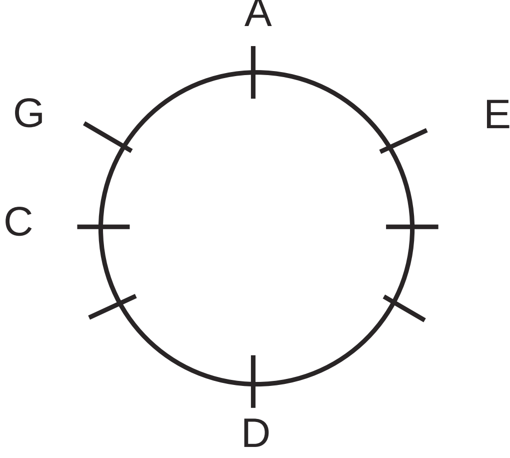
1. 'B' అనే బాలుడు ఎవరి మధ్య కూర్చున్నాడు?
   ఎ) F, G బి) E, F సి) H, F డి)G, D
2. 'H'అనే బాలికకు కుడివైపు ఎవరు కూర్చున్నారు?
   ఎ) D బి) C సి) B డి) కనుక్కోలేం.
3. 'A', 'B' ల మధ్య కూర్చున్నదెవరు?
   ఎ) E బి) Fసి) G డి) H
4. ఎదురెదురుగా కూర్చున్నవారు తమ తమ స్థానాలను పరస్పరం మార్చుకుంటే 'C', 'D' ల మధ్య ఎవరు కూర్చుంటారు?
   ఎ) E బి) Fసి) G డి) H
5. 'G' కి ఎదురుగా కూర్చున్న వ్యక్తి, 'A' పరస్పరం తమ స్థానాలను మార్చుకుంటే 'F' కి కుడివైపు ఎవరు కూర్చుంటారు?
   ఎ) E బి) B సి) A డి) ఏదీ కాదు.

సమాధానం: దత్తాంశం నుంచి A, D, E లు కూర్చునే వరుస కింది విధంగా ఉంటుంది.

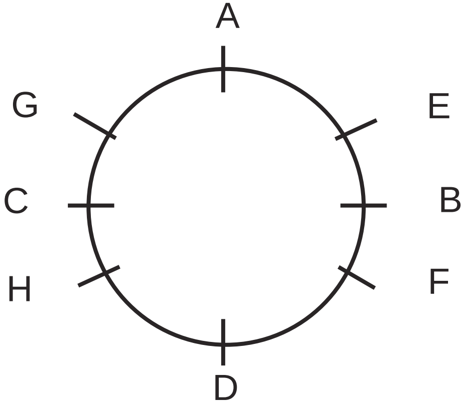


ఇక్కడ A, D లు బాలురు, E బాలిక.

దత్తాంశం ప్రకారం 'G' అనే బాలిక 'D' పక్కన కూర్చోలేదు. ఏ ఇద్దరు బాలికలూ పక్కపక్కన కూర్చోలేదు. కాబట్టి 'G' అనే బాలిక 'A' కి కుడి పక్కన కూర్చోవాలి. ఇప్పుడు 'G', 'C' లు కూర్చునే వరుస ఈ విధంగా ఉంటుంది.



'B' అనే బాలుడు 'E' కి ఎడమ పక్క కూర్చో వాలి. దత్తాంశం ప్రకారం 'B'కి ఎడమ పక్కన 'F' అనే బాలిక కూర్చుంది. మిగిలిన ఒక స్థానంలో 'H' అనే బాలిక కూర్చోవాలి. కాబట్టి అందరూ కూర్చు నే వరుస ఈ కింది విధంగా ఉంటుంది.



అడిగిన ప్రశ్నలకు సమాధానాలు గుర్తించడం సులభం

1. పై పటం నుంచి 'B' అనే బాలుడు 'E', 'F' ల మధ్య కూర్చున్నాడు.

   సమాధానం: b.

2. 'H'కి కుడివైపున కూర్చున్నది 'D'

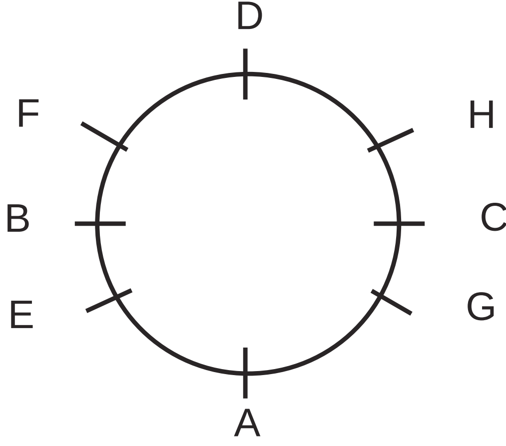
   సమాధానం: a

3. 'A' 'B'ల మధ్య కూర్చున్నది 'E'.

   సమాధానం: a

4. ఎదురెదురుగా కూర్చున్న వాళ్ల తమ స్థానాలను పరస్పరం మార్చుకుంటే వారు కూర్చొనే వరుస ఇలా

ఉంటుంది.



'C' 'D'ల మధ్యన కూర్చున్నది 'H'అనే బాలిక.

∴ **సమాధానం:** D.

గమనిక: ఒక వేళ ఎదురెదురుగా కూర్చున్న బాలురు పరస్పరం తమ స్థానాలను మార్చు కుంటే C, Dల మధ్య ఎవరు కూర్చుంటారు అంటే సమాధానం 'E' అవుతుంది.

5) 'G'కి ఎదురుగా ఉండే వ్యక్తి 'F'. ఇప్పుడు 'F', 'A'లు తమ స్థానాలను పరస్పరం మార్చుకుం టే 'F'కి కుడివైపు 'G'అనే బాలిక ఉంటుంది.

∴ **సమాధానం:** d.

ఉదాహరణ: ఎనిమిది పుస్తకాలు ఒక దానిపై మరొకటి అమర్చి ఉన్నాయి. పై నుంచి రెండో, ఐదో పుస్తకాలు ఫిజిక్స్‌కి సంబంధించినవి. ఫిజిక్స్‌కి సంబంధించిన రెండు పుస్తకాలు కెమిస్ట్రీకి సంబం ధించిన రెండు పుస్తకాల మధ్యలో ఉన్నాయి. ఫిజిక్సి క్ సంబంధించిన ఒక పుస్తకం గణితానికి సంబం ధించిన రెండు పుస్తకాల మధ్య ఉంది. జీవశాస్త్రానికి సంబంధించిన పుస్తకం మీద కెమిస్ట్రీకి సంబంధిం చిన పుస్తకం ఉంది. అయితే పై నుంచి నాల్గవ పుస్తకం ఏ సబ్జెక్టుకు సంబంధించింది. **(M.B.A. 2006)**

సమాధానం: ఫిజిక్స్, కెమిస్ట్రీ, గణితం, జీవ శాస్త్రాలకు సంబంధించిన పుస్తకాలను వరుసగా 'P', 'C', 'M', 'B' అనే అక్షరాలతో సూచిద్దాం. ఇప్పుడు ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని విశ్లేషిద్దాం. దత్తాంశం ప్రకారం ఫిజిక్స్ పుస్తకాలు 3, కెమిస్ట్రీ పుస్తకాలు 2, గణితం పుస్తకాలు 2, జీవశాస్త్రానికి సంబంధించిన పుస్తకం 1 ఉన్నాయి.

దత్తాంశం నుంచి ఫిజిక్స్, కెమిస్ట్రీ పుస్తకాల అమరిక ఈ విధంగా ఉంటుంది.

1. –   2. P 3. –
4. C   5. P 6. P
7. C   8. –

దత్తాంశం ప్రకారం గణితం, జీవశాస్త్రాలకు సంబంధించిన పుస్తకాల అమరిక ఈ విధంగా ఉంటుంది.

1. M   2. P 3. M
4. C   5. P 6. P

7. <u>C</u> 8. <u>B</u>

అంటే మొత్తం ఎనిమిది పుస్తకాల అమరిక ఈ విధంగా ఉంటుంది.

∴ పై నుంచి నాల్గవ పుస్తకం కెమిస్ట్రీకి సంబంధించింది.

ఉదాహరణ: A, B, C, D అనే నలుగురు భారత దౌత్యవేత్తలు ఒక వరుసలో M, N, O, P అనే నలుగురు అమెరికన్ దౌత్యవేత్తలు మరో వరు సలో భారత దౌత్యవేత్తలకు ఎదురుగా కూర్చున్నా రు. 'M', 'P' ఇద్దరూ వరసలో చివరన కూర్చోలేదు. 'A'కి ఎదురుగా 'P' కూర్చున్నాడు. 'M'అనే దౌత్య వేత్త 'D'కి ఎదురుగా, 'O'కి ఎడమవైపు కూర్చున్నా డు. 'O'కి ఎదురుగా 'B' కూర్చున్నాడు. అయితే ఈ ఎనిమిది మంది దౌత్యవేత్తలు ఏయే విధంగా కూర్చోవడానికి అవకాశం ఉందో కనుక్కోండి.

సమాధానం: A, B, C, Dలు దక్షిణం వైపు, M, N, O, Pలు ఉత్తరం వైపు ముఖం చేసి (ఎదురెదురుగా) కూర్చున్నారని అనుకుందాం. దత్తాంశం ప్రకారం 'M', 'P'లు వరుస మధ్యలో కూర్చుంటారు. 'M'కి ఎదురుగా 'D', 'P'కి ఎదురుగా 'A' కూర్చుంటారు. కాబట్టి 'M' 'P' 'A' 'D'లు కూర్చునే వరుస కింది విధంగా ఉంటుంది.

– D, A, – లేదా – A, D –
– M, P – – P, M –

దత్తాంశం ప్రకారం 'O'కి ఎడమవైపు 'M' కూర్చున్నాడు. అంటే 'O' కుడి చివరన కూర్చుం టాడు. ఇతనికి ఎదురుగా 'B' కూర్చుంటాడు. అంటే 'B' అతని వరుసలో ఎడమ చివర కూర్చుంటాడు. మిగిలిన రెండు స్థానాల్లో వారి వారి వరుసల్లో 'N' 'C'లు కూర్చుంటారు. కాబట్టి ఎనిమిది మంది దౌత్యవేత్తలు కింద ఇచ్చిన రెండు విధాలుగా కూర్చోవడానికి అవకాశం ఉంది.

i) C, D, A, B
N, M, P, O లేదా

ii) C, A, D, B
N, P, M, O

గమనిక: పై రెండు విధాల అమరికను ఆధారంగా చేసుకుని ప్రశ్నలు అడగవచ్చు. ఉదాహరణకు

i) 'N'కి ఎదురుగా కూర్చున్నదెవరు?

సమాధానం: C

ii) కర్ణాభిముఖంగా కూర్చున్నదెవరు?

సమాధానం: 'C' 'O'లు ఒక కర్ణం వెంబడి, 'N' 'B'లు మరో కర్ణం వెంబడి కూర్చున్నారు. కాబట్టి 'C' 'O'లు, 'N' 'B'లు కర్ణాభిముఖం గా కూర్చున్నారు.

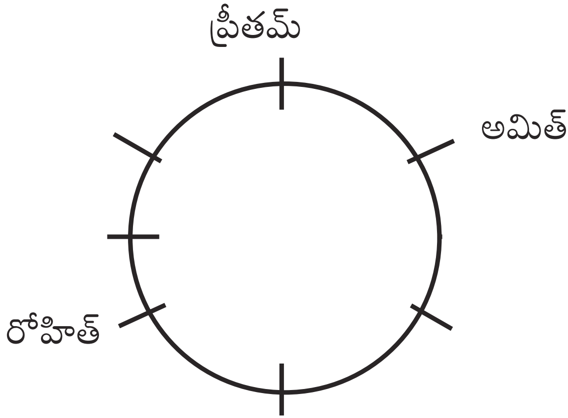
iii) 'B'కి కుడి పక్కన ఎవరు కూర్చుంటారు?

సమాధానం: పై రెండు అమరికల నుంచి 'B' కి కుడి పక్కన 'A' లేదా 'D' లు కూర్చోవడానికి అవకాశం ఉంది. అంటే కచ్చితంగా ఎవరు కూర్చుంటారో చెప్పడం సాధ్యం కాదు. కాబట్టి

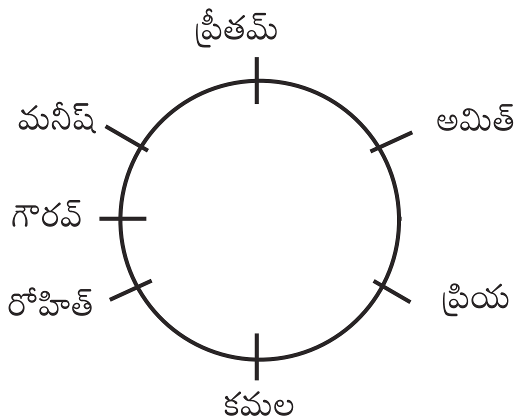
సమాధానం 'A' లేదా 'D' అలాగే 'O' కి ఎడమ పక్కన ఎవరు కూర్చుంటారు అంటే సమాధానం 'P' లేదా 'M' అవుతుంది. ఇక్కడ కూడా కచ్చితంగా చెప్పలేం.

ఉదాహరణ: కమల, మనీష్, రోహిత్, అమిత్, గౌరవ్, ప్రీతమ్, ప్రియ అనే ఏడుగురు స్నేహితులు ఒక వృత్త పరిధిపై కూర్చున్నారు. గౌరవ్ మినహా మిగతా ఆరుగురూ వృత్తపరిధిపై సమాన దూరాల్లో కూర్చున్నారు. ప్రీతమ్‌కు కుడివైపు మూడో స్థానం లో రోహిత్ కూర్చున్నాడు. అమిత్‌కి కుడి పక్కన ప్రీతమ్ కూర్చున్నాడు. వృత్త కేంద్రం వద్ద కమల, గౌరవ్‌లు 90°ల కోణం చేస్తున్నారు. అలాగే కమల, మనీష్‌లు కేంద్రం వద్ద 120°ల కోణం చేస్తున్నారు. మనీష్, ప్రియకు ఎదురుగా గౌరవ్‌కు ఎడమ పక్కన కూర్చున్నాడు. అయితే వారు కూర్చున్న వరుసను కనుక్కోండి? **(M.A.T. 1997)**

సమాధానం: మొదట వారు కూర్చున్న వరుస ను కనుక్కుందాం. దత్తాంశం ప్రకారం ప్రీతమ్, రోహిత్, అమిత్‌లు కూర్చునే వరుస ఈ విధంగా ఉంటుంది.



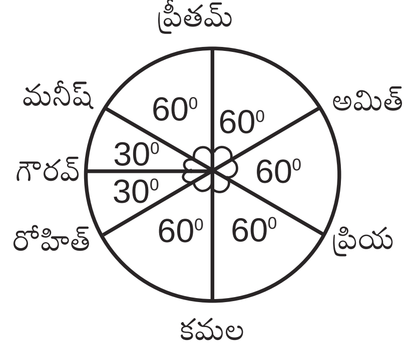
దత్తాంశం ప్రకారం మనీష్, ప్రియకు ఎదురు గా, గౌరవ్‌కు ఎడమ పక్కన కూర్చున్నాడు. కాబట్టి వారు కూర్చునే వరుస ఈ విధంగా ఉంటుంది. మిగిలిన ఒక్క స్థానంలో కమల కూర్చుంటుంది.



ఇప్పుడు ఆయా వ్యక్తులు కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాలను కనుక్కొందాం. దత్తాంశం ప్రకారం గౌరవ్ మినహా మిగతా ఆరుగురు వ్యక్తులు సమాన దూరంలో కూర్చున్నారు. కాబట్టి ఈ ఆరుగురిలో పక్కపక్కన కూర్చున్నవారు వృత్తకేంద్రం వద్ద చేసే కోణం = 360°/6° (వృత్తంలోని మొత్తం కోణం = 360°) = 60°

కమల, గౌరవ్‌లు కేంద్రం వద్ద చేసే కోణం 90° కాబట్టి గౌరవ్, రోహిత్‌ల మధ్య; గౌరవ్, మనీష్‌ల మధ్య కోణం = $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

ఇప్పుడు వారు కూర్చున్న అమరిక ఈ విధంగా ఉంటుంది.



పై అమరిక ఆధారంగా ప్రశ్నలు అడగవచ్చు.

సీటింగ్ అరేంజ్‌మెంట్స్-3

ఆరుగురు గాని, ఎనిమిది మంది వ్యక్తులు గాని ఒక రౌండ్ టేబుల్ చుట్టూ ఏ విధంగా కూర్చు న్నారో తెలుసుకోవడానికి కొన్ని ఆధారాలు ఇచ్చి, వాటి ఆధారంగా కనీసం రెండు లేదా మూడు ప్రశ్నలు అడగవచ్చు.

ఇలాంటి ప్రశ్నలు వచ్చినప్పుడు ఇచ్చిన డేటాను చదివి విశ్లేషించి ఒక పటం వేయాలి. దీని ఆధారంగా సమాధానాలు సాధించవచ్చు.

ఉదాహరణలు

I. ఎనిమిది మంది రాజకీయ ప్రముఖులు వై.ఎస్. రాజశేఖర్ రెడ్డి, చంద్రబాబు నాయుడు, చిరంజీవి, కె.సి.ఆర్., జయప్రకాశ్ నారాయణ, దత్తాత్రేయ, రాఘవులు, దేవేందర్ గౌడ్‌లు ఒక సమావేశంలో రౌండ్ టేబుల్ చుట్టూ కింద చెప్పిన విధంగా కూర్చున్నారు.

వైఎస్సార్ ఎదురుగా చంద్రబాబు నాయుడు, చిరంజీవి ఎదురుగా కె.సి.ఆర్. కూర్చున్నారు. వైఎస్సార్‌కు కుడివైపు దత్తాత్రేయ, చంద్రబాబు నాయుడుకు కుడివైపు దేవేందర్ గౌడ్ కూర్చు న్నారు. దత్తాత్రేయ, రాఘవులు మధ్యలో చిరంజీవి కూర్చున్నారు. అయితే

1. వైఎస్సార్‌కు ఎడమవైపున ఎవరు కూర్చున్నారు?

ఎ) జయప్రకాశ్ నారాయణ

బి) దత్తాత్రేయ

సి) చంద్రబాబు నాయుడు

డి) చిరంజీవి

2. చిరంజీవికి ఇరువైపులా కూర్చున్నది ఎవరు?

ఎ) దత్తాత్రేయ, వైఎస్సార్

బి) దత్తాత్రేయ, రాఘవులు

సి) వైఎస్సార్, చంద్రబాబు నాయుడు

డి) కె.సి.ఆర్, దత్తాత్రేయ

3. దత్తాత్రేయ ఎదురుగా కూర్చున్నది ఎవరు?

ఎ) కె.సి.ఆర్ బి) చిరంజీవి

సి) దేవేందర్ గౌడ్ డి) రాఘవులు

4. చంద్రబాబు ఎవరెవరి మధ్యలో కూర్చున్నాడు?

ఎ) చిరంజీవి, వైఎస్సార్

బి) వైఎస్సార్, రాఘవులు

సి) కె.సి.ఆర్., దేవేందర్ గౌడ్

డి) రాఘవులు, దేవేందర్ గౌడ్

5. కె.సి.ఆర్.కు కుడివైపున కూర్చున్నది ఎవరు?

ఎ) దేవేందర్ గౌడ్

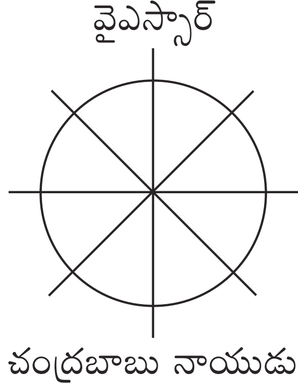
బి) జయప్రకాశ్ నారాయణ

సి) రాఘవులు

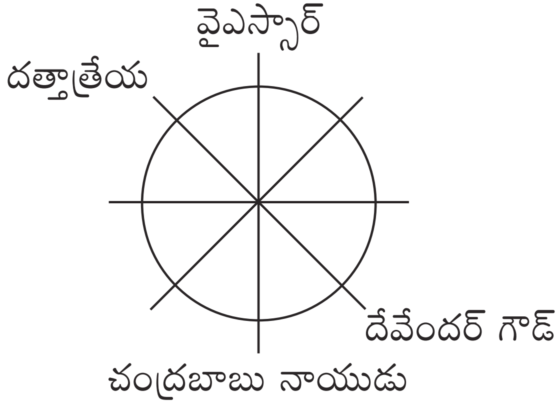
డి) చిరంజీవి

ఇలాంటి ప్రశ్నలు వచ్చినప్పుడు ముందుగా పటం వేసి సమస్యలో ఇచ్చిన సూచనల అనుసారం వీరిని కూర్చోబెట్టాలి. ఈ సూచనలలో మొదట ఏదోఒక సూచనను తీసుకొని, దాని ఆధారంగా వారి ని మనకిష్టమైన స్థలంలో కూర్చో బెట్టాలి. ఆ తర్వాత కూర్చున్న వారి ఆధారంగా, సూచనలను పాటిస్తూ మిగతావారిని కూర్చోబెట్టాలి.

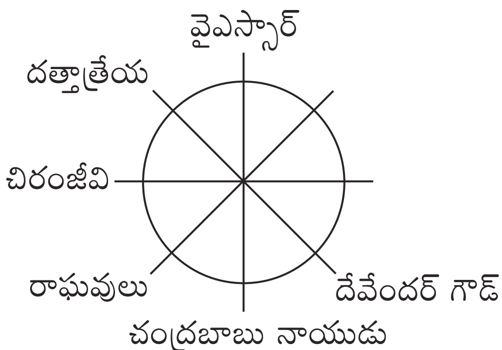
- ముందుగా వైఎస్సార్‌కు ఎదురుగా చంద్రబాబు నాయుడు కూర్చున్నారు. సూచన ఆధారంగా వారిని కూర్చోబెట్టాలి.



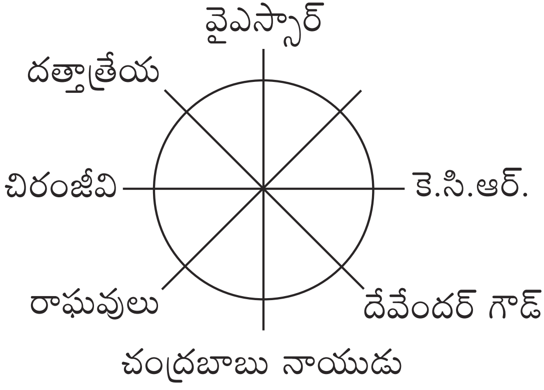
- రెండో సూచన–చిరంజీవికి ఎదురుగా కె.సి.ఆర్. అని ఇచ్చారు. కానీ వీరిద్దరూ వైఎస్సార్, చంద్రబాబులకు ఎటువైపు కూర్చున్నారో తెలియదు.
- మూడో సూచన– వైఎస్సార్‌కు కుడివైపు దత్తాత్రేయ, చంద్రబాబుకు కుడివైపున దేవేందర్ గౌడ్ కూర్చున్నారు.



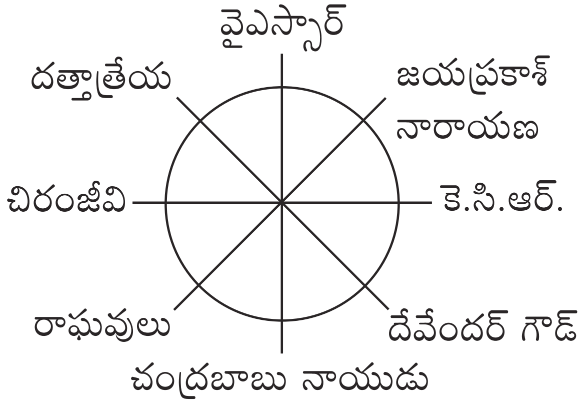
- నాలుగో సూచన–దత్తాత్రేయ, రాఘవులు మధ్యలో చిరంజీవి కూర్చున్నారు.



● రెండో సూచన–చిరంజీవికి ఎదురుగా కె.సి.ఆర్ కూర్చున్నాడు.



● ఎనిమిది మంది రాజకీయ ప్రముఖుల్లో ఒక వ్యక్తి జయప్రకాశ్ మిగిలిపోయారు. ఒక సీటు ఖాళీగా ఉంది. ఆ సీట్లో అతనిని కూర్చోబెట్టాలి.



ఈ విధంగా ఎనిమిది మంది ప్రముఖులను వారి వారి స్థానాల్లో కూర్చోబెట్టాక ప్రశ్నలను సులభంగా చేయవచ్చు.

పై ప్రశ్నలకు సమాధానాలు

1) ఎ2) బి 3) సి4) డి5) బి

II. ఎనిమిది మంది సినీ ప్రముఖులు చిరంజీవి, కమల్‌హాసన్, మహేష్, నాగార్జున, రమ్యకృష్ణ, త్రిష, నయనతార, భూమికలు ఒక రౌండ్ టేబుల్ చుట్టూ కింద చెప్పిన విధంగా కూర్చున్నారు.

1. ఇద్దరు ఆడవారు కానీ, ఇద్దరు మగవారు కానీ పక్క పక్కన కూర్చోలేదు.

2. చిరంజీవి ఎదురుగా మహేష్, రమ్యకృష్ణ ఎదురుగా భూమిక కూర్చున్నారు.

3. చిరంజీవికి ఎడమవైపున రమ్యకృష్ణ కూర్చుంది.

4. చిరంజీవి నాగార్జునకు మధ్యలో నయనతార కూర్చున్నారు. అయితే

6. ఎవరెవరి మధ్యలో చిరంజీవి కూర్చున్నారు?

ఎ) రమ్యకృష్ణ, నయనతార

బి) నాగార్జున, కమల్‌హాసన్

సి) భూమిక, త్రిష

డి) నయనతార, త్రిష

7. నయనతార ఎదురుగా ఎవరు కూర్చున్నారు?

ఎ) నాగార్జున బి) భూమిక

సి) త్రిష డి) రమ్యకృష్ణ

8. కమల్‌హాసన్‌కు కుడివైపున ఎవరు కూర్చున్నారు?

ఎ) నయనతార బి) మహేష్

సి) భూమిక డి) రమ్యకృష్ణ

9. మహేష్‌కు ఇరువైపుల కూర్చు న్నది ఎవరు?

ఎ) నయనతార, భూమిక

బి) భూమిక, త్రిష

సి) త్రిష, రమ్యకృష్ణ

డి) రమ్యకృష్ణ, నయనతార

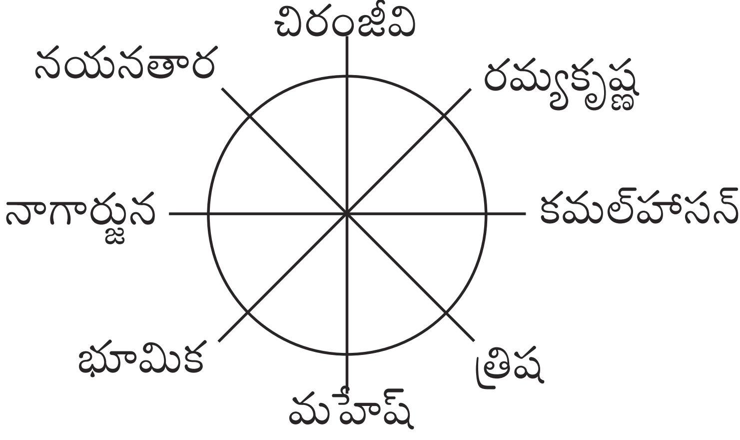
10. నాగార్జునకు కుడివైపున కూర్చున్నది ఎవరు?

ఎ) భూమిక బి) నయనతార

సి) రమ్యకృష్ణ డి) త్రిష

పై ప్రశ్నను విశ్లేషిస్తూ సూచనల ఆధారంగా వారిని కూర్చోబెడుతూ పటం గీయాలి. వారిని వారి వారి

స్థానాల్లో కూర్చోబెడితే కిందివిధంగా ఉంటుంది.



పై ప్రశ్నలకు సమాధానాలు

6) ఎ 7) సి 8) డి 9) బి 10) ఎ

III. A, B, C, D, E, F అనే ఆరుగురు మిత్రులు ఒక రౌండ్ టేబుల్ చుట్టూ కింద చెప్పిన విధంగా కూర్చున్నారు.

F, Bల మధ్యలో D కూర్చున్నాడు. Dకి ఎడమవైపు రెండో స్థానంలో A, Eకి కుడి స్థానంలో A ఉన్నారు. అయితే

1. Aకి ఎదురుగా ఉన్నది ఎవరు?

ఎ) B బి) C సి) E డి) D

2. Dకి ఎదురుగా ఉన్నది ఎవరు?

ఎ) A బి) C సి) B డి) E

సమాధానాలు

1) ఎ 2) బి

నేటి చిట్కా

ఏదైనా ఒక సంఖ్య ఒకట్ల స్థానంలో 5 ఉంటే, వాటి వర్గాలు తెలుసుకోవాలంటే, ముందుగా పదుల

స్థానంలో ఉన్న సంఖ్యను, దాని తర్వాత సంఖ్యతో గుణించి, ఆ లబ్ధం తర్వాత చివరలో 25 రాయాలి.

ఉదా: $35^2 = 3\times (3+1) /25=3\times4 /25 = 1225$

$45^2 = 4 \times 5 /25 = 2025$

$55^2 = 3025$

$65^2 = 4225$

$75^2 = 5625$

$85^2 = 7225$

$95^2 = 9025$

పట్టీకరణ-1

పట్టీకరణ (Tabulation)

గ్రూప్-I మెయిన్స్ పరీక్షలో సెక్షన్-IIలో 'పట్టికలు' అనేది ప్రధాన అంశం. పట్టికలకు సంబంధించి దత్తాంశాన్ని ప్రదర్శించడం, అన్వయించడం అనేవి రెండు ముఖ్య భాగాలు. 2008 గ్రూప్-I పరీక్షలో పట్టికల దత్తాంశ ప్రదర్శన నుంచి 10 మార్కులు, అన్వయించడం నుంచి 10 మార్కుల ప్రశ్నలు వచ్చాయి.

దత్తాంశ ప్రదర్శన:

సాధారణంగా సేకరించిన దత్తాంశం విశ్లేషణకు, నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి అనువుగా ఉండదు. కాబట్టి సేకరించిన దత్తాంశాన్ని ఒక నిర్దిష్టమైన రూపంలో ప్రదర్శించడం అవసరం. అప్పుడే ఆ దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించి, తులనాత్మక పరిశీలన (Comparitive Study) చేయడానికి అవకాశం ఉంటుంది.

దత్తాంశాన్ని కింది పద్ధతుల్లో ప్రదర్శించొచ్చు.

- పాఠ్య రూపం (Textual Form)
- బొమ్మలు (Diagrams)
- పట్టికలు (Tables)

పాఠ్య రూపం:

ఈ పద్ధతిలో సేకరించిన దత్తాంశాన్ని పాఠ్య రూపంలో ప్రదర్శిస్తాం. దత్తాంశంలో సమాచారం ఎక్కువ ఉంటే ఈ పద్ధతి అంత అనువైంది కాదు. దత్తాంశంలోని సంఖ్యల స్వభావం, తీరుతెన్నులు మొదలైన వాటిని అర్థం చేసుకోవడం సాధ్యం కాదు. కాబట్టి సాధారణంగా దత్తాంశ ప్రదర్శనకు ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించం.

బొమ్మలు

సంఖ్యా రూపంలో ఉన్న దత్తాంశాన్ని చదువరులు సులభంగా అవగాహన చేసుకొని, తగిన నిర్ణ యాలు తీసుకోవాలంటే ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని బొమ్మల రూపంలో ప్రదర్శించడం అనువుగా ఉంటుంది. దత్తాంశ ప్రదర్శన ఆకర్షణీయంగా కూడా ఉంటుంది. సామాన్య వ్యక్తులు కూడా దత్తాంశం స్వభావాన్ని, తీరుతెన్నులను సులభంగా గ్రహించొచ్చు.

బొమ్మలు - రకాలు

ఏక పరిమాణ చిత్రాలు (One-Dimensional Diagrams)

ఏక పరిమాణ చిత్రాల్లో బార్ చిత్రాలు ప్రధాన మైనవి. బార్ చిత్రాల్నే కమ్మీ చిత్రాలు లేదా దిమ్మె చిత్రాలు అని కూడా అంటారు. దత్తాంశ ప్రదర్శనకు ఎక్కువగా ఈ చిత్రాల్నే ఉప యోగిస్తున్నారు. బార్ చిత్రాల్లో మళ్లీ '6' రకాలు. అవి

1. రేఖా పటాలు (Line Diagrams)
2. సాధారణ దిమ్మె చిత్రం (Simple Bar Diagram)
3. ఉప విభాజిత దిమ్మె చిత్రం (Sub Divided Bar Diagram) (or) (Component Bar Diagram)
4. బహుళ దిమ్మె చిత్రం (Multiple Bar Diagram)
5. శాతపు దిమ్మె చిత్రం (Percentage Bar Diagram)
6. విచలన దిమ్మె చిత్రం (Deviation Bar Diagram)

పై '6' రకాల దిమ్మె చిత్రాలను ఆయా దత్తాంశాల స్వభావాలను బట్టి ఎంపిక చేసుకోవాలి.

ద్వి పరిమాణ చిత్రాలు:

ద్వి పరిమాణ చిత్రాల్లో కిందివి ముఖ్యమైనవి.

- దీర్ఘ చతురస్రాలు
- చతురస్రాలు
- వృత్తాలు
- వృత్త రేఖా చిత్రాలు (Pie-Charts)

ద్వి పరిమాణ చిత్రాల్లో పొడవు, వెడల్పు రెండింటికీ ప్రాధాన్యముంటుంది. అంటే ఈ చిత్రాల్లో వైశాల్యాన్ని పరిగణనలోకి తీసుకుని దత్తాంశాన్ని ప్రదర్శిస్తాం. ఏక పరిమాణ చిత్రాల్లో దిమ్మెల పొడ వుకు మాత్రమే ప్రాధాన్యముంటుంది. వెడల్పుకు ఉండదు.

త్రి పరిమాణ చిత్రాలు

ఈ చిత్రాల్లో పొడవు, వెడల్పులతో పాటు ఎత్తును కూడా పరిగణనలోకి తీసుకుంటారు. అంటే ఘన పరిమాణాన్ని (volume) పరిగణనలోకి తీసుకొని దత్తాంశాన్ని ప్రదర్శిస్తాం. వీటిలో ముఖ్యమైనవి.

- ఘనాలు - స్థూపాలు - గోళాలు

పిక్టోగ్రామ్‌లు:

దత్తాంశంలోని అంశాలకు సంబంధించిన బొమ్మ లను ఉపయోగించి దత్తాంశాన్ని ప్రదర్శిస్తాం. ఉదాహరణకు దేశంలో తయారవుతున్న విమానాల సంఖ్యను ప్రదర్శించడానికి విమాన బొమ్మలను ఉపయోగించడం వంటివి. ఈ పద్ధతిలో ప్రదర్శిం చిన దత్తాంశాన్ని నిరక్షరాస్యులు కూడా అర్థం చేసుకోగలుగుతారు.

కార్టోగ్రామ్‌లు

ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని భౌగోళిక ప్రాంతాల వారీగా ప్రదర్శించడానికి ఈ చిత్రాలను వాడతారు.

ఉదాహరణకు ప్రాంతాల వారీగా వర్షపాతం వివ రాలు, ఉష్ణోగ్రత వివరాలు మొదలైనవాటిని ప్రదర్శించడానికి కార్టోగ్రామ్‌లు అనుకూలమైనవి.

ఇచ్చిన దత్తాంశ స్వభావాన్ని బట్టి పై '5' రకాల చిత్ర పటాల్లో ఏదో ఒక దాన్ని ఎన్నుకోవచ్చు. అయితే చిత్రపటాలు దత్తాంశం ఉజ్జాయింపు విలువలను మాత్రమే చూపుతాయి. ఎక్కువ సమాచారాన్ని ప్రదర్శించడానికి ఇవి అనువుగా ఉండవు.

పట్టికలు:

ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని అడ్డు, నిలువు వరుసల్లో హేతుబద్ధంగా అమర్చి తగినంత వివరణ పదజాలాన్ని పొందుపరచడాన్ని పట్టీకరణ అని అంటారు. ఇచ్చిన సమాచారాన్ని ఏ విధంగా పట్టికలో పొందుపరచాలో ఒక చిన్న ఉదాహరణ ద్వారా చూద్దాం.

ఉదాహరణ:

1981 జనాభా లెక్కల ప్రకారం ఒక రాష్ట్రంలోని జనాభా 50 మిలియన్లు. వీరిలో పురుషులు 26 మిలియన్లు. 1991 నాటికి రాష్ట్ర జనాభా 5 మిలియన్లు పెరిగింది. స్త్రీల జనాభా 1981 నాటి కంటే 2 మిలియన్లు పెరిగింది. 2001 నాటికి జనాభా మళ్లీ 6 మిలియన్లు పెరిగింది. పురుషుల జనాభా 1991తో పోల్చితే 2.5 మిలియన్లు పెరిగింది. ఈ దత్తాంశాన్ని పట్టికలో పొందు పర్చండి.

సమాధానం:

మొదట దత్తాంశంలోని రాశులను, వాటిలోని ఉప విభాగాలను గుర్తిస్తే–

కాలం – సంవత్సరాల్లో ఉంది

జనాభా – పురుషుల జనాభా

స్త్రీల జనాభా

జనాభా మిలియన్లలో ఉంది.

దత్తాంశం ప్రకారం 1981లో స్త్రీల జనాభా = మొత్తం జనాభా – పురుషుల జనాభా

= 50 – 26

= 24 మిలియన్లు

ఇటువంటి సాధారణ నియమాలను అనుసరించి, దత్తాంశంలో ఇవ్వని విలువలను గణించాలి. ఇప్పుడు ఇచ్చిన సమాచారాన్ని పట్టికలో పొందు పరుదాం.

రాష్ట్ర జనాభాలో స్త్రీలు, పురుషులు

(జనాభా మిలియన్లలో)

సంవత్సరం	పురుషులు	స్త్రీలు	మొత్తం జనాభా
1981	26	24	50

1991	29	26	55
2001	31.5	29.5	61

ఇచ్చిన సమాచారాన్ని పై విధంగా పట్టికలో పొందుపరచడం ద్వారా కింది ప్రయోజనాలు ఉన్నాయి.

1. దత్తాంశాన్ని సులభంగా ప్రదర్శించొచ్చు.
2. దత్తాంశాన్ని సులువుగా అన్వయించొచ్చు.
3. వివిధ రాశుల స్వభావాలు, వాటి మధ్య సంబంధాలను అర్థం చేసుకొని తులనాత్మక పరిశీలన చేయవచ్చు.
4. పట్టిక నుంచి ఆయా గణాంకపు కొలతలను సులువుగా పొందొచ్చు. తగిన నిర్ణయాలు తీసుకోవచ్చు.

పట్టికలోని ముఖ్య భాగాలు

పట్టిక నెంబరు: (పరీక్షలో పట్టిక నెంబరును సూచించాల్సిన అవసరం లేదు)

పట్టిక పేరు (Title):

ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని బట్టి పట్టికకు తగిన పేరును సూచించాలి.

శీర్షికలు (Captions):

నిలువు వరుసల పేర్లను శీర్షికలు అని అంటాం.

స్టబ్ (Stub):

అడ్డ వరుసల పేర్లను స్టబ్‌లు అని అంటాం. ఎడమ చివరన ఉన్న అన్ని అడ్డుగళ్లను కలిపి స్టబ్ బాక్స్ (stub box) అని అంటారు.

అంశాలను సూచించే భాగం (Body):

ఇది పట్టికలో అతి ప్రధానమైన భాగం. దత్తాంశంలోని అంశాలను, సంఖ్యలను అన్నింటినీ ఈ భాగంలో ప్రదర్శిస్తాం.

ముఖ్య గమనిక (Head Note):

పట్టికలోని అంశాల గురించి సంగ్రహంగా బోధపరిచే వాక్యం ముఖ్య గమనిక. ఇది పట్టిక పేరు కింద కుండలీకరణంలో ఉంటుంది.

ఉదాహరణ: (జనాభా మిలియన్లలో)

పాదసూచిక (Foot Note):

పట్టికలో ఏదైనా ఒక నిర్దిష్ట అంశాన్ని గురించి ప్రత్యేకంగా చెప్పాల్సి వచ్చినప్పుడు పాద సూచికను వాడతాం. దీన్ని పట్టిక దిగువ భాగంలో రాస్తాం. పరీక్షలో దీని అవసరం సాధారణంగా రాదు.

మూలం (Source):

దత్తాంశంలోని సమాచారం ఏ మూలం నుంచి సేకరించారో ఇది తెలియజేస్తుంది. సాధారణంగా పరీక్షలో దీని అవసరం కూడా రాదు.

9. పట్టికను తయారు చేసినవారు:

పట్టికను తయారు చేసిన వారి వివరాలను పట్టిక కింద తెలపాలి. అయితే పరీక్షలో ఈ వివరాలను రాయకూడదు.

నమూనా

పట్టిక పేరు

పట్టిక నెంబరు (ముఖ్య గమనిక)

స్టబ్ శీర్షికలు

Main Body

పాద సూచిక మూలం

పట్టిక తయారు చేసినవారు

పట్టీకరణ-2

పట్టికలు

పట్టీకరణలో సంబంధించిన ప్రాథమిక అంశాలను చర్చించాం. ఈ శీర్షికలో ఆయా రకాల దత్తాంశాలను పట్టికలో పొందుపరచడం, ఇందుకు సంబంధించిన వాస్తవిక మార్గదర్శకాలను తెలుసుకుందాం.

ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని పట్టీకరించడానికి కింది వాస్తవిక మార్గదర్శకాలను దృష్టిలో ఉంచుకోవాలి. కొన్నిసార్లు ఈ మార్గదర్శకాలకు భిన్నంగా కూడా పట్టికలు రూపొందించి ఉండొచ్చు.

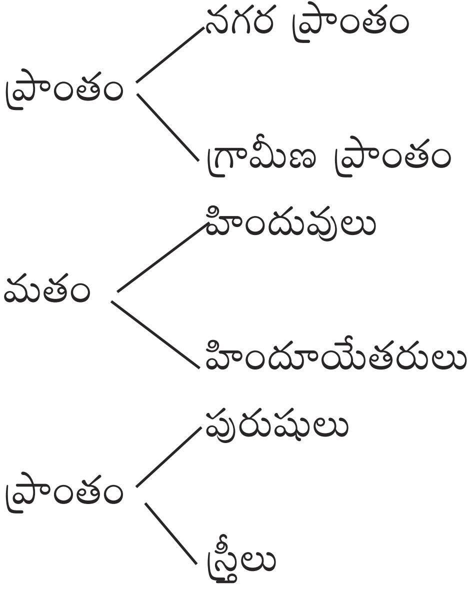
1. ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని రాశులు, వాటిలోని ఉపవిభాగాలను గుర్తించాలి.
2. సాధారణంగా కాలం, ప్రాంతం, ఇతర పేర్లను అడ్డువరుసల్లో పొందుపరచాలి.
3. సజాతీయ రాశులను అడ్డ వరుసల్లో లేదా నిలువు వరుసల్లో ఒకే దగ్గర పొందుపరుస్తారు.
4. ఉపవిభాగాలు ఉన్న రాశులను నిలువు వరుసల్లో అమర్చాలి.
5. రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ రాశులు ఉన్నప్పుడు ఇచ్చిన దత్తాంశం ప్రవహించే వరుసలోనే రాశులనూ అమర్చాలి.
6. ఇచ్చిన దత్తాంశం ఆధారంగా పట్టిక ప్రధాన భాగంలోని గళ్లను పూరించాలి.
7. సాధారణ గణిత నియమాలను అనుసరించి ఖాళీ గళ్లను పూరించాలి.
8. పట్టికకు తగిన పేరును సూచించాలి.
9. ప్రమాణాలు సూచించాలి. అవసరమైతే ముఖ్య గమనిక, పాదసూచికలను రాయాలి.
10. అడిగిన ప్రశ్నలకు సమాధానం రాయాలి. పరీక్షలో పట్టిక నిర్మించేటప్పుడు జవాబు పత్రంలో పట్టిక గీసే ముందు Frame work or skelletonను Rough paperలో గీచి చూసుకోవడం మంచిది.

పై మార్గదర్శకాలను ఏ విధంగా అనుసరిం చాలో కింది ఉదాహరణ ద్వారా చూద్దాం.

1. 1991 జనాభా లెక్కల ప్రకారం ఒక రాష్ట్రం మొత్తం జనాభా 128 మిలియన్లు. అందులో 74 మిలియన్లు నగరవాసులు. నగరాల్లో 25 మిలియన్లు హిందూ మతానికి చెందిన పురుషులు. నగరంలో నివసించే 34 మిలియన్ల మహిళల్లో కేవలం 12 మిలియన్లు హిందూయే తరులు. మొత్తం హిందూయేతరులు 41 మిలియన్లు, వీరిలో 23 మిలియన్లు పురు షులు. గ్రామాల్లో నివసిస్తున్న హిందూ మహిళల సంఖ్య 22 మిలియన్లు. ఈ దత్తాం శాన్ని పట్టీకరించండి?

(Civil Services Mains, 1993)

మొదట ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని రాశులను గుర్తిద్దాం.



నగరం, గ్రామీణ ప్రాంతాలను అడ్డువరుసల్లో, మతాన్ని, లింగాన్ని నిలువు వరుసల్లో అమర్చు దాం. దత్తాంశంలో ముందు మతం ఆ తరువాత ఆయా మతాల్లోని మహిళలు, పురుషుల సంఖ్య ఇచ్చారు కాబట్టి ముందు మతం, ఆ తరువాత లింగాన్ని పరిగణించాలి.

పట్టిక 1 ఆధారంగా కొన్ని ప్రశ్నలను పరిశీ లిద్దాం

ప్ర. గ్రామీణ ప్రాంతంలో నివసించే హిందూయే తర పురుషులు ఎంత మంది?

జ.8 మిలియన్లు.

ప్ర. మొత్తం హిందూయేతర స్త్రీల్లో నగరవాసులు ఎంత శాతం ఉన్నారు?

జ.పట్టిక నుంచి మొత్తం హిందూయేతర స్త్రీలు = 18 మిలియన్లు. ఇందులో నగరవాసులు = 12 మిలియన్లు.

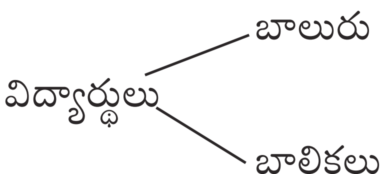
మొత్తం హిందూయేతర స్త్రీల్లో నగరవాసుల శాతం $= 12/18 \times 100 = 66.66$

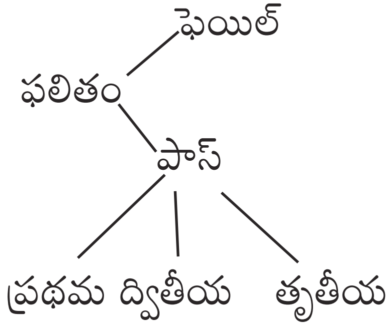
సమాధానం: 66.66 శాతం

2. 500 మంది విద్యార్థులు ఒక పరీక్ష రాస్తే అందులో 40 శాతం బాలికలు. 20 మంది బాలికలతో కలిపి మొత్తం 100 మంది ఫెయిల్ అయ్యారు. పాసైన వారిలో ‘10’ శాతం మంది ప్రథమ శ్రేణిలో, ‘20’ శాతం మంది తృతీయ శ్రేణిలో పాసయ్యారు. మిగతావారు ద్వితీయ శ్రేణిలో పాసయ్యారు. ఇందులో సగం మంది బాలురు. ఏ ఒక్క బాలిక కూడా ప్రథమ శ్రేణిలో పాస్‌కాలేదు. ఈ దత్తాంశాన్ని పట్టీక రించి, ఎంత శాతం బాలురు ప్రథమ శ్రేణిలో పాసయ్యారో కనుక్కోండి?

(Civil Services Mains, 1992)

జ.మొదట దత్తాంశంలోని రాశులు, వాటిలోని ఉపవిభాగాలను గుర్తిద్దాం.





బాలురు, బాలికలను అడ్డు వరుసల్లో, ఫలితాలకు సంబంధించిన ఉపవిభాగాలను నిలువు వరుసల్లో అమర్చుదాం. (పట్టిక 2)

దత్తాంశం నుంచి మొత్తం బాలికల సంఖ్య = 500లో 40%

$= 500 \times 40/100 = 200$

ప్రథమ శ్రేణిలో పాసైన వారి సంఖ్య = 400లో 10%

$= 400 \times 10/100 = 40$

తృతీయ శ్రేణిలో పాసైన వారిసంఖ్య = 400 లో 20%

$= 400 \times 20/100 = 80$

ఈ అంశాల ఆధారంగా పట్టిక–2 నిర్మించారు.

పట్టిక నుంచి మొత్తం బాలుర సంఖ్య = 300

ప్రథమ శ్రేణిలో పాసైన బాలురు = 40

∴ అడిగిన శాతం

$= 40/300 \times 100 = 13.33$

∴ సమాధానం 13.33%

3. 2000 సంవత్సరంలో ఒక ఫ్యాక్టరీలోని మొత్తం పనివాళ్ల సంఖ్య 1750. వీరిలో 1200 మంది యూనియన్ మెంబర్లు. మహిళల సంఖ్య 200 వీరిలో 175 మంది యూనియన్ మెంబర్లు కారు. 2005లో యూనియన్ మెంబర్ల సంఖ్య 1510కి పెరిగింది వీరిలో 1290 మంది పురుషులు. యూనియన్ మెంబర్లు కాని వారి సంఖ్య 208కి తగ్గింది, వీరిలో 180 మంది మహిళలు. ఈ దత్తాంశాన్ని తగిన పట్టికలో పొందుపరచండి. ఈ ఐదేళ్ల కాలంలో యూని యన్ మెంబర్లు అయిన మహిళల్లో పెరుగుదల శాతం ఎంత?

(Civil Servies Mains, 2007)

జ. ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని రాశులు.

2000వ సంవత్సరం

కాలం

2005వ సంవత్సరం

ఉన్నవారు

యూనియన్‌లో సభ్యత్వం <

లేనివారు

మహిళలు

లింగం <

పురుషులు

అవసరం అనుకుంటే మొత్తం పనివాళ్లకు సంబంధించిన నిలువు వరుసలో కూడా పురుషులు, మహిళలు, మొత్తం అనే మూడు నిలువ వరుసల్ని గీయవచ్చు.

పట్టిక 3 నుంచి 2000లో యూనియన్ మెంబర్లైన మహిళల సంఖ్య = 175

2005లో వీరి సంఖ్య = 220

పెరుగుదల శాతం =

(తుదివిలువ – తొలివిలువ)

------------------- × 100

తొలివిలువ

= (220 – 175) / 175 × 100 = 26.72

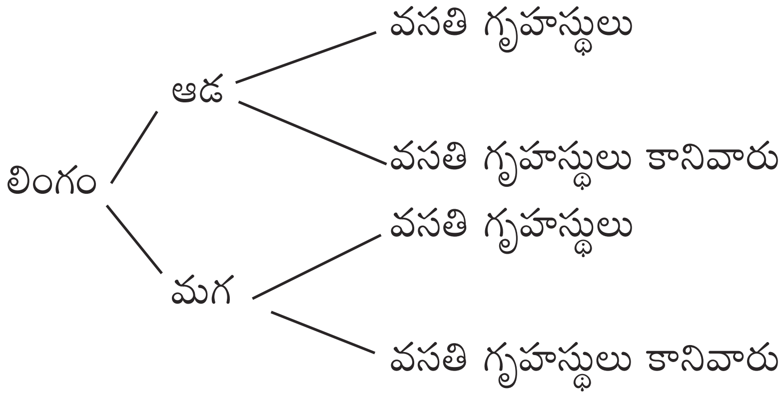
∴ సమాధానం 26.72%

4. 75 మార్కులు ఉన్న ఒక ప్రశ్న పత్రంలో 70మంది విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కుల విశ్లేషణ ఈ విధంగా ఉంది. ఈ దత్తాంశాన్ని పట్టికలో సమర్పించండి.'30' లేదా ఎక్కువ, '40' కంటే తక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులు '14' మంది ఉన్నారు. వీరిలో '8' మంది పురుషులు, ఇందులో నలుగురు వసతి గృహస్థులు. మహిళల్లో ఇద్దరు వసతి గృహ స్థులు కారు. '40' లేదా ఎక్కువ, '50' కంటే తక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులు '26' మంది ఉన్నారు. ఇందులో '16' మంది పురుషులు, వీరిలో ఆరుగురు వసతి గృహస్థులు కారు. మహిళల్లో ఐదుగురు వసతి గృహస్థులు. '50'లేదా ఎక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులు '30' మంది ఉన్నారు. ఇందులో ఏడుగురు మహిళలు వసతి గృహస్థులు కానివారు, పురుషులు '14' మంది, వీరిలో '8' మంది వసతి గృహస్థులు.

(APPSC, Group 1, Model Paper, 2007)

జ.మొదట విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కులను 30–40, 40–50, 50–75 అనే మినహాయింపు తరగతులుగా విభజించవచ్చు.

దత్తాంశంలోని ఇతర రాశులు –



విద్యార్థుల మార్కులను అడ్డ వరుసల్లో, మిగిలిన రాశులను నిలువు వరుసల్లో అమర్చ వచ్చు. (పట్టిక 4)

పట్టిక 1 – ఒక రాష్ట్ర జనాభా వివరాలు – 1991 సెన్సస్ ప్రకారం

(జనాభా మిలియన్లలో)

ప్రాంతం	హిందువులు			హిందుయేతరులు			మొత్తం జనాభా
	పురుషులు	స్త్రీలు	మొత్తం	పురుషులు	స్త్రీలు	మొత్తం	
నగర ప్రాంతం	25	22	47	15	12	27	74
గ్రామీణ ప్రాంతం	18	22	40	8	6	14	54
మొత్తం	43	44	87	23	18	41	128

పట్టిక 2 – విద్యార్థుల పరీక్షా ఫలితాల వివరాలు

విద్యార్థులు	పాసైన వారి సంఖ్య				ఫెయిలైన వారి సంఖ్య	మొత్తం
	ప్రథమ శ్రేణి	ద్వితీయ శ్రేణి	తృతీయ శ్రేణి	మొత్తం		
బాలురు	40	140	40	220	80	300
బాలికలు	00	140	40	180	20	200
మొత్తం	40	280	80	400	100	500

పట్టిక 3 – ఒక ఫ్యాక్టరీలోని పనివాళ్ల వివరాలు

సంవత్సరం	యూనియన్ మెంబర్లు			యూనియన్ మెంబర్లు కానివారు			మొత్తం పనివాళ్లు
	పురుషులు	స్త్రీలు	మొత్తం	పురుషులు	స్త్రీలు	మొత్తం	
2000	1025	175	1200	525	25	550	1750
2005	1290	220	1510	180	28	208	1718

పట్టిక 4 – విద్యార్థుల మార్కులు, నివాసం వివరాలు

మార్కులు	పురుషులు			స్త్రీలు			మొత్తం
	వసతి గృహస్థులు	వసతి గృహస్థులు కానివారు	మొత్తం	వసతి గృహస్థులు	వసతి గృహస్థులు కానివారు	మొత్తం	
30-40	4	4	8	4	2	6	14
40-50	10	6	16	5	5	10	26
50-75	8	6	14	9	7	16	30
మొత్తం	22	16	38	18	14	32	70

పట్టీకరణ-3

పట్టికలు

గత శీర్షికలో ఇచ్చిన దత్తాంశానికి పట్టికలను ఏ విధంగా నిర్మించాలో చర్చించాం. ఈ శీర్షికలో పట్టికలకు సంబంధించి మరికొన్ని ఉదాహరణ లను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ: 2001లో ఒక ఫ్యాక్టరీలో 18,000 మంది కార్మికులు ఉన్నారు. వీరిలో 13,000 మంది ట్రేడ్ యూనియన్‌లో సభ్యులు. 12 శాతం కార్మికులు మహిళలు, వీరిలో 60 శాతం మంది ట్రేడ్ యూనియన్‌లో సభ్యులు. 2002వ సంవత్సరంలో కార్మికుల సంఖ్య 6 శాతం పెరిగింది, వీరిలో 480 మంది మహిళలు. ట్రేడ్ యూనియన్ సభ్యత్వంలో మహిళలు సంఖ్య 304 తగ్గింది, మొత్తం సభ్యుల సంఖ్య 10 శాతం పెరిగింది. ఈ దత్తాంశాన్ని పట్టీకరించండి.

(civil services -n 2003)

సమాధానం:

మొదట ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని రాశులు, వాటిలోని ఉపవిభాగాలను గుర్తిద్దాం.

కాలం
- 2001వ సంవత్సరం
- 2002వ సంవత్సరం

కార్మికులు
- ట్రేడ్ యూనియన్ సభ్యులు
- ట్రేడ్ యూనియన్‌లో సభ్యులు కానివారు

లింగం
- మహిళలు
- పురుషులు

ఇప్పుడు దత్తాంశంలోని ఇవ్వని విలువలను కనుగొందాం.

2001వ సంవత్సరం

మహిళా కార్మికుల సంఖ్య = 18000లో 12 శాతం $= 18000 \times \frac{12}{100} = 2160$

పురుష కార్మికుల సంఖ్య =

$18000 - 2160 = 15840$

ట్రేడ్ యూనియన్‌లో సభ్యులైన మహిళా కార్మికుల సంఖ్య = 2160లో 60 శాతం

$2160 \times \frac{60}{100} = 1296$

ట్రేడ్ యూనియన్‌లో సభ్యులైన పురుష కార్మికుల సంఖ్య = $13000 - 1296 = 11704$

2002వ సంవత్సరం

మొత్తం కార్మికుల సంఖ్య = $18000 \times \frac{(100+6)}{100}$

= 19080

మహిళా కార్మికుల సంఖ్య = 2160 + 480 = 2640

పురుష కార్మికుల సంఖ్య = 19080–2640= 16440

ట్రేడ్ యూనియన్‌లోని మొత్తం సభ్యులు $= 13000 \times \frac{(100+10)}{100}$ = 14,300

ట్రేడ్ యూనియన్‌లోని మహిళా సభ్యుల సంఖ్య

= 1296 – 304 = 992

ట్రేడ్ యూనియన్‌లోని పురుష సభ్యుల సంఖ్య = 14300 – 992 = 13308

ట్రేడ్ యూనియన్‌లో సభ్యులు కాని వారి సంఖ్య = 19080 – 14300 = 4780

వీరిలో మహిళలు = 2640 – 992 = 1648

వీరిలో పురుషులు = 16440–13308 = 3132

పై దత్తాంశాన్ని కింది విధంగా పట్టీకరించవచ్చు.

2001 & 2002లో ఒక ఫ్యాక్టరీలోని

కార్మికుల వివరాలు

కార్మికులు

2001 సం॥లో ట్రేడ్ యూనియన్‌లో సభ్యులు **పురుషులు స్త్రీలు మొత్తం**

11704 1296 13000

ట్రేడ్ యూనియన్‌లో సభ్యులు కానివారు

పురుషులుస్త్రీలు మొత్తం

4136 864 5000

మొత్తం 15840 2160 18000

2002 సం॥లో ట్రేడ్ యూనియన్‌లో సభ్యులు

పురుషులుస్త్రీలు మొత్తం

13308 992 14300

ట్రేడ్ యూనియన్‌లో సభ్యులు కానివారు

పురుషులుస్త్రీలు మొత్తం

3132 1648 4780

మొత్తం 16440 2640 19080

ఉదాహరణ: 2001వ సంవత్సరంలో ఒక ప్రాంతం జనాభాను వయసులో ఆధారంగా కింది పట్టికలో పొందుపరిచారు.

వయసు (సం॥లలో)	శాతం
15 వరకు	30
16 – 25	18
26 – 35	17
36 – 45	15
46 – 55	14
56 – 65	5
65 పైన	1
మొత్తం	**100**

పై పట్టిక ఆధారంగా కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.

ఎ) ఏ వయసు వారు అధిక సంఖ్యలో ఉన్నారు, ఏ వయసు వారు అల్ప సంఖ్యలో ఉన్నారు.

జవాబు: 15 సంవత్సరం లోపల ఉండేవారు అధిక సంఖ్యలో ఉన్నారు. 65 సంవత్సరాల పైబడిన వారు అల్ప సంఖ్యలో ఉన్నారు.

బి) 26 – 35 సం॥ వయసు కలవారు 46 – 55 సంవత్సరాల వయసు కలవారి కంటే 6 మిలియన్లు ఎక్కువ అయితే ఆ ప్రాంతపు జనాభా ఎంత?

జవాబు: ఆ ప్రాంతపు జనాభా = x అనుకొంటే.. దత్తాంశం ప్రకారం xలో 17 శాతం – xలో 14 శాతం = 6 మిలియన్లు

$\Rightarrow$ x లో 3 శాతం = 6

$\Rightarrow$ xలో 3 శాతం = 6

$\Rightarrow x \times \frac{3}{100} = 6$

$\Rightarrow$ x = 200 మిలియన్లు.

సి) మొత్తం 4200 మందిలో 25 సంవత్సరాల లోపు వయస్సు ఉండేవారు ఎందరు.

జవాబు:

4200లో 30 శాతం + 4200లో 18 శాతం

$= 4200 \times \frac{48}{100} = 2016$

$\therefore$ సమాధానం 2016

డి) 56 – 65 సంవత్సరాల వయస్సు వారికి 36 – 45 సంవత్సరాల వయస్సు వారికి గల నిష్పత్తి

ఎంత?

జవాబు: మొత్తం జనాభాలో 5 శాతం

అడిగిన నిష్పత్తి = ―――――――――――

మొత్తం జనాభాలో 15 శాతం

$= \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ∴ సమాధానం 1 : 3

ఉదాహరణ: 100 మంది విద్యార్థులకు గణితం, సైన్సులలో వచ్చిన మార్కుల ఆధారంగా ఈ కింది విధంగా పట్టీకరించారు. గరిష్ట మార్కులు 50

సబ్జెక్టు	మార్కులు				
	≥40	≥30	≥20	≥10	≥0
గణితం	9	32	80	92	100
సైన్స్	4	21	66	81	100
సరాసరి	7	27	73	87	100

పై పట్టిక ఆధారంగా ఈ కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.

ఎ) సరాసరి మార్కులు 40 శాతం కంటే ఎంత మందికి తక్కువ వచ్చాయి.

జవాబు:

40 శాతం మార్కులు = $50 \times \frac{40}{100} = 20$ సగటు

మార్కులు 20 కంటే తక్కువ వచ్చిన విద్యార్థుల సంఖ్య = 100 –73 = 27

∴ సమాధానం 27

బి) గణితంలో 60 శాతం కంటే ఎక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులు ఎందరు?

జవాబు:

60 శాతం మార్కులు = $50 \times \frac{60}{100} = 30$ పట్టిక నుంచి గణితంలో 30 కంటే ఎక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థుల సంఖ్య = 32

∴ సమాధానం 32

సాంఖ్యక శాస్త్రం-1

'సాంఖ్యక శాస్త్రం నుంచి 'Civil Services Mains' పరీక్షలో 8 మార్కులు, 'Group - I, Mains'లో 10 మార్కులు, ప్రశ్నలు వచ్చే అవకాశం ఉంది. సాంఖ్యక శాస్త్రం గణిత పరమైనప్పటికీ ఇందులోని మౌలిక భావనలను అవగతం చేసు కొని, సూత్రాలను గుర్తుంచుకొని, సాధన చేస్తే ఈ అంశం నుంచి వచ్చే ప్రశ్నలను అభ్య ర్థులంతా సులభంగానే ఛేదించవచ్చు.

దత్తాంశ సేకరణ, విశ్లేషణ, వివరణలకు సాంఖ్యక శాస్త్రం తోడ్పడుతుంది. సేకరించిన దత్తాం శాన్ని ప్రదర్శించడానికి అనేక మార్గాలున్నాయి.

1. ముడి దత్తాంశం లేదా అవర్గీకృత దత్తాంశం (Raw data or Ungrouped data):

దీన్నే వ్యక్తిగత దత్తాంశం అని కూడా అంటారు.

ఉదాహరణ:

పరీక్షలో 20 మంది విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కులు ఈ విధంగా ఉన్నాయి. 40, 45, 43, 47, 48, 49, 50, 54, 60, 63, 65, 70, 75, 74, 76, 80, 84, 89, 90, 92.

పై విధంగా ఉండే దత్తాంశాన్ని అవగాహన చేసుకొని, ఏవైనా నిర్ణయాలు తీసుకోవడం వీలుకాదు. దత్తాంశ స్వభావాన్ని కూడా సులభంగా అర్థం చేసుకోలేం. దత్తాంశంలో ఎక్కువ విలువలు ఉన్నప్పుడు ఈ విధంగా ప్రదర్శించలేం.

2. వర్గీకృత విచ్ఛిన్న శ్రేణులు (grouped - discrete series):

ఈ పద్ధతిలో దత్తాంశాన్ని కొన్ని సమూహాలుగా విభజిస్తారు. సమూహాలన్నీ వేటికవే ప్రత్యేకంగా ఉంటాయి. ఆయా సమూహాల్లోని విలువల మధ్య భేదం ఉంటుంది.

ఉదాహరణ:

ఒక తరగతిలోని 30 మంది విద్యార్థులకు పరీక్షలో వచ్చిన మార్కులు ఈ విధంగా ఉన్నాయి.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
40	2
45	3
48	1
56	2
62	1

65	4
71	2
74	3
80	2
మొత్తం	20

మొదటి పద్ధతి కంటే రెండో పద్ధతిలో దత్తాంశాన్ని ప్రదర్శించడం,అర్థం చేసుకోవడం తేలికే.

3. వర్గీకృత అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు (Grouped continuous Series):

వీటినే పౌనఃపున్య పట్టికలు లేదా పౌనఃపున్య విభాజనాలు (Frequency Table or Frequency distribution) అని కూడా అంటారు. ఈ పద్ధతిలో దత్తాంశాన్ని సమూహాలుగా విభజిస్తారు. ఆయా సమూహాల్లోని విలువలు అవిచ్ఛిన్నంగా (Continuous) ఉంటాయి.

ఉదాహరణ:

తరగతిలో ఉండే 50 మంది విద్యార్థులకు ఒక పరీక్షలో వచ్చిన మార్కులు ఈ విధంగా ఉన్నాయి.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
40 – 50	12
50 – 60	3
60 – 70	10
70 – 80	14
80 – 90	6
90 – 100	5
మొత్తం	50

ఈ విధమైన పౌనఃపున్య పట్టికల నుంచి దత్తాం శంలోని చలరాశుల (Variables) ప్రవర్తనలోని తీరుతెన్నులు, దత్తాంశంలో అంతర్గతంగా ఉండే కొన్ని స్వభావాలు విశదంగా బహిర్గతమవుతాయి. కేంద్ర స్థాన కొలతలు, అసౌష్ఠవత వంటి పద్ధతుల ద్వారా పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని విశ్లేషించవచ్చు. సాధారణంగా తరగతుల సంఖ్య 5 నుంచి 15 వరకు ఉండే అవకాశం ఉంది. పై పట్టికలో 40 – 50, 50 – 60, 60 – 70 ..... మొదలైన వాటిని తరగతులు అంటారు. ఈ పట్టికలో ఆరు తరగుతులు ఉన్నాయి.

అవధులు:

40 – 50 అనే తరగతిలో ‘40’ని దిగువ అవధి (Lower limit), ‘50’ని ఎగువ అవధి (Upper limit) అంటారు. అంటే.. 40 నుంచి 50 లోపు మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థుల సంఖ్య ‘12’ అని అర్థం.

తరగతి అంతరం: (Class Interval)

రెండు వరుస తరగతుల దిగువ అవధులు లేదా ఎగువ అవధుల మధ్య భేదాన్ని తరగతి అంతరం అంటారు.

పై పౌనఃపున్య పట్టికలో తరగతి అంతరం

= 50 – 40 = 10

తరగతులు: తరగతులను రెండు రకాలుగా వర్గీకరించవచ్చు.

1. విలీన తరగతులు (Inclusive classes)
2. మినహాయింపు తరగతులు (Exclusive classes)

ఒక తరగతి ఎగువ అవధి, దాని తర్వాతి తరగతి దిగువ అవధికి సమానంగా ఉంటే ఆ తరగతులను మినహాయింపు తరగతులని, సమానంగా లేకుంటే విలీన తరగతులు అని అంటారు.

ఉదాహరణ:

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0 – 9	10
10 – 19	9
20 – 29	6
30 – 39	5
40 – 49	10
మొత్తం	40

పై పౌనఃపున్య పట్టికలోని తరగతులు విలీన తరగతులు. తరగతులను పై విధంగా రాసే పద్ధతిని అంతర్గత పద్ధతి అని కూడా అంటారు. ఈ పద్ధతిలో ఒక తరగతి ఎగువ అవధి అదే తరగతిలో విలీనమై ఉంటుంది. అంటే '19' మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థి 10 – 19 అనే తరగతికి చెందిన వాడై ఉంటాడు.

ఉదాహరణకు ఒక విద్యార్థికి పరీక్షలో 19.5 మార్కులు వస్తే ఆ విద్యార్థిని ఏ తరగతిలో కూడా విలీనం చేయలేం. ఎందుకంటే 19.5 అనేది 10 – 19కి, 20 – 29కి సంబంధించిన విలువ కాదు. కాబట్టి దత్తాంశంలో అన్ని విలువలూ పూర్ణాంకా లైనప్పుడు మాత్రమే అంతర్గత పద్ధతి ఉపయోగ పడుతుంది.

దత్తాంశంలోని విలువలు పూర్ణాంకాలు కాకుంటే (అంటే మనుషుల బరువులు, ఎత్తులు మొదలైనవి).. మినహాయింపు తరగతులు తీసుకో వడం సమంజసంగా ఉంటుంది. ఉదాహరణకు ఒక తరగతిలోని 50 మంది విద్యార్థుల బరువులను సూచించడానికి ఈ కింది విధంగా పౌనఃపున్య పట్టికను నిర్మించవచ్చు.

బరువు (కేజీల్లో)	విద్యార్థుల సంఖ్య
20 – 25	6
25 – 30	8

30 – 35	10
35 – 40	10
40 – 45	9
45 – 50	7
మొత్తం	50

ఈ పద్ధతినే బహిర్గత పద్ధతి అని కూడా అంటారు. ఈ పద్ధతిలో ఒక తరగతి ఎగువ అవధిని ఆ తరగతిలో నుంచి మినహాయించి, దాని తర్వాతి తరగతిలో విలీనం చేస్తాము. అంటే ఉదాహరణకు '35' kgల బరువున్న విద్యార్థిని 30 – 35 తరగతిలో లెక్కించకుండా 35 – 40 తరగతిలో లెక్కిస్తాం.

పౌనఃపున్యం (Frequency): ఒక తరగతికి చెందిన విలువల సంఖ్యను ఆ తరగతి పౌనఃపున్యం అంటారు. పౌనఃపున్యాన్ని సాధారణంగా 'f' అనే అక్షరంతో సూచిస్తాం. ఉదాహరణకు పై పౌనఃపున్య పట్టికలో 20 – 25 అనే తరగతి పౌనఃపున్యం = 6. అనే విధంగా 40 – 45 అనే తరగతి పౌనఃపున్యం = 9. పౌనఃపున్యాల మొత్తాన్ని సాధారంగా అక్షరం 'N'తో సూచిస్తాం. పై పట్టికలో

$N = 6 + 8 + 10 + 9 + 7$

$= 50$

తరగతుల మధ్య విలువ:

ఒక తరగతి మధ్య విలువ = $\dfrac{\text{దిగువ అవధి + ఎగువ అవధి}}{2}$

పై పట్టికలో మొదటి తరగతి

మధ్య విలువ $= \dfrac{20+25}{2} = 22.5$ kg

అలాగే చివరి తరగతి మధ్య విలువ $= \dfrac{45+50}{2} = 47.5$ kg.

సాంఖ్యక శాస్త్రం-2

గత సంచికలో సాంఖ్యక శాస్త్రానికి సంబంధించిన ప్రాథమిక అంశాలను చర్చించాం. ఇప్పుడు వీటికి సంబంధించి మరి కొన్ని అంశాలను, కొన్ని ఉదాహరణలను చర్చిద్దాం.

సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనాలు:

సాధారణ పౌనఃపున్య పట్టికలో కేవలం ఆయా తరగతుల పౌనఃపున్యాలను మాత్రమే పరిశీలిం చగలం. కొన్ని సందర్భాల్లో దత్తాంశంలోని ఏదైనా ఒక విలువ కంటే ఎక్కువ లేదా తక్కువ పరిమాణం కలిగిన పౌనఃపున్యాల సంఖ్య అవసరం అవుతుంది. ఇటువంటి సందర్భాలలో సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనాలు ఉపయోగపడతాయి. ఇవి రెండు రకాలు:

1. ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనం
   (Less than Cumulative Frequen-cy)
2. అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనం
   (Greater than Cumulative Frequency

ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనం

ఒక పౌనఃపున్య విభాజనంలో మొదటి నుంచి ఒక తరగతి ఎగువ అవధి వరకు ఉండే పౌనఃపున్యాల మొత్తాన్ని ఆ తరగతి ఆరోహణ సంచిత పౌనః పున్యం అంటారు.

ఉదాహరణ:

బరువు (కిలోల్లో)	విద్యార్థుల సంఖ్య	ఆరోహణ సంచిత పౌ.పు.
20 – 25	6	6
25 – 30	8	6+8=14
30 – 35	10	6+8+10=24
35 – 40	10	6+8+10+10=34
40 – 45	6	6+8+10+10+6=40

అంటే 30 కిలోల కంటే తక్కువ బరువు ఉన్న మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య 14, అలాగే 40 కిలోల కంటే తక్కువ బరువు ఉన్న మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య 34, ఈ విధంగా అన్నమాట. అన్ని తరగతుల పౌనఃపున్యాల మొత్తం చివరి తరగతి ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యానికి సమానం.

అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనం:

తరగతి దిగువ అవధి కంటే ఎక్కువ పరిమాణం కలిగిన మొత్తం పౌనఃపున్యాన్ని ఆ తరగతి అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం అని అంటారు.

బరువు (కిలోల్లో)	విద్యార్థుల సంఖ్య	అవరోహణ సంచిత పౌ.పు.
20 – 25	6	6+8+10+10+6=40
25 – 30	8	8+10+10+6=32
30 – 35	10	10+10+6=26
35 – 40	10	10+6=16
40 – 45	6	6

అంటే 25 కిలోలు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ బరువు ఉండే విద్యార్థుల మొత్తం సంఖ్య 32, అలాగే 35 కిలోలు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ బరువు ఉండే విద్యార్థుల సంఖ్య 16, ఈ విధంగా అన్నమాట. అన్ని తరగతుల పౌనఃపున్యాల మొత్తం మొదటి తరగతి అవరోహణ సంచిత పౌనఃపు న్యానికి సమానం.

కేంద్ర స్థానపు కొలతలు:

పౌనఃపున్య విభాజనానికి సంబంధించి కేంద్ర స్థానాన్ని కొలవడానికి ముఖ్యంగా మూడు రకాల కొలతలు అందుబాటులో ఉన్నాయి. అవి.

1) అంక మధ్యమం లేదా అంకగణిత సగటు
(Artihmetic Mean)

2) మధ్యగతం లేదా మధ్యంతర సగటు
(Median)

3. బాహుళకం (Mode)

అంక మధ్యమం:

కేంద్ర స్థానాన్ని కొలవడానికి తరచుగా ఉపయో గించే కొలత ఇది.

అంక మధ్యమం =

$$\frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + ... + f_4x_4}{f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_4} \qquad = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{\sum fx}{N}$$

f_1, f_2, f_3... అనేవి పౌనఃపున్యాలు,

x_1, x_2, x_3.... అనేవి తరగతి మధ్య విలువలు

ఉదాహరణ:

ఈ కింది తరగతుల అంకగణితపు

సగటు ఎంత?

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0 – 10	5
10 – 20	7
20 – 30	15
30 – 40	8
40 – 50	3
50 – 60	2

సమాధానం:

ఇచ్చిన పౌనఃపున్య విభాజనానికి ఆయా తరగతుల మధ్య విలువలను కనుగొని ఈ విధంగా రాయొచ్చు.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	తరగతుల మధ్య విలువలు (x)	f × x
0 – 10	5	$\frac{0+10}{2}$ =5	25
10 – 20	7	15	105
20 – 30	15	25	375
30 – 40	8	35	280
40 – 50	3	45	135
50 – 60	2	55	110
మొత్తం	N=40		1020

పై పౌనఃపున్య పట్టిక నుంచి

$$\sum fx = 1020,$$
$$\sum f = N = 40$$

అంకమధ్యమం = $\frac{\sum fx}{N} = \frac{1020}{40} = 25.5$

∴ ఇచ్చిన దత్తాంశం అంకగణిత సగటు = 25.5

అంటే తరగతిలోని విద్యార్థులకు వచ్చిన సగటు మార్కులు 25.5 అని అర్థం.

అంకగణిత సగటు విశిష్టత (Merits):

1. ఇది కేవలం ఒకే విధంగా నిర్వచించి, ఒకే ఒక విలువను కలిగి ఉంటుంది.
2. ఇది దత్తాంశంలోని అన్ని విలువలపై కూడా ఆధారపడి ఉంటుంది.
3. సులభంగా గణించవచ్చు, సులభంగా అవగాహన చేసుకోవచ్చు.

అంకగణిత సగటు – లోపాలు (Demerits):

1. ఈ సగటుపై దత్తాంశంలోని విపరీత అంశాల ప్రభావం ఉంటుంది. అంటే అత్యధిక, అత్యల్ప విషయాల వల్ల ఈ సగటులో చాలా మార్పు వస్తుంది.
2. ఇది కేవలం వర్ణనాత్మకమైన కొలత మాత్రమే. ఇది దత్తాంశంలోని అన్ని విలువలను ప్రతిబింబించలేదు.

ఉదాహరణ:

50 షాపుల్లో రోజువారి విద్యుత్ వినియోగం యూని ట్లలో ఇవ్వడమైంది. ఈ పౌనఃపున్య విభాజనానికి సగటును కనుక్కోండి?

విద్యుత్ వినియోగం	షాపుల సంఖ్య
20 – 29	5
30 – 39	12
40 – 49	16
50 – 59	10
60 – 69	4
70 – 79	3

సమాధానం:

ఇచ్చిన పౌనఃపున్య విభాజనానికి ఆయా తరగతుల మధ్య విలువలను కనుగొని ఈ విధంగా రాయవచ్చు.

విద్యుత్ వినియోగం	షాపుల సంఖ్య (f)	తరగతుల మధ్య విలువలు (x)	f × x

20 – 29	5	20+29/2 = 24.5	122.5
30 – 39	12	34.5	414.0
40 – 49	16	44.5	712.0
50 – 59	10	54.5	545.0
60 – 69	4	64.5	258.0
70 – 79	3	74.5	223.5
మొత్తం	N=50		2275

పై పట్టిక నుంచి $\sum fx = 2275,$

$\sum f = N = 50$

అంకగణిత సగటు = $\frac{\sum fx}{N} = \frac{2275}{50} = 45.5$

∴ ఇచ్చిన దత్తాంశం సగటు = 45.5 అంటే సగటున ఒక్కో షాపు రోజుకు 45.5 యూనిట్ల విద్యుత్‌ను వినియోగిస్తున్నట్లు అర్థం.

మధ్యగతం

దత్తాంశంలోని విలువలను ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో రాసిన తర్వాత సరిగ్గా మధ్యలో ఉండే విలువనే ''మధ్యగతం'' అని అంటారు. వర్గీకృతం కాని దత్తాంశానికి మధ్యగ తాన్ని కింది విధంగా కనుక్కోవచ్చు.

మొదట దత్తాంశంలో అన్ని విలువలను ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో అమర్చాలి. ఇచ్చిన దత్తాంశంలో 'n' విలువలు ఉండి, 'n' బేసి సంఖ్య అయితే $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ స్థానంలోని విలువ మధ్యగతం అవుతుంది. అలాగే 'n' సరిసంఖ్య అయితే మధ్యవిలువలు రెండు ఉంటాయి. అవి $\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1$ విలువలు అవుతాయి. ఇటువంటి సందర్భంలో ఈ రెండింటి సగటును 'మధ్యగతం' గా భావిస్తాం.

ఉదాహరణ:

ఈ కింది రాశుల మధ్యగతాన్ని కనుక్కోండి?

3, 12, 6, 8, 1, 15, 18, 7, 5

సమాధానం:

ఇచ్చిన రాశులను ఆరోహణ క్రమంలో రాస్తే,

1, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 15, 18

రాశుల సంఖ్య = 9 (బేసిసంఖ్య)

∴ 9+1/2 = 5వ స్థానంలోని రాశి మధ్యగతం అవుతుంది. ∴ మధ్యగతం = 7

ఉదాహరణ:

ఒక చలరాశి విలువలు

30, 5, 21, 42, 13, 10, 27, 33, 17, 8 అయితే

వాటి మధ్యగతం ఎంత?

సమాధానం:

ఇచ్చిన చలరాశి విలువలను ఆరోహణ క్రమంలో రాయగా,

5, 8, 10, 13, 17, 21, 27, 30, 33, 42.

దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య =
10, అంటే $\frac{10}{2}, \frac{10}{2}+1$ అంటే 5, 6 స్థానాల్లోని రాశుల సగటు మధ్యగతం అవుతుంది.

మధ్యగతం = $\frac{17+21}{2}$ = 19

సాంఖ్యక శాస్త్రం-3

పౌనఃపున్య విభాజనానికి మధ్యగతం

ఇచ్చిన పౌనఃపున్య విభాజనంలో పౌనఃపున్యాల మొత్తం 'N' అయితే మొదట N/2 విలువను లెక్కించాలి. ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం నుంచి N/2వ రాశి ఏ తరగతిలో ఉందో ఆ తరగతిని ''మధ్యగత తరగతి'' అని అంటాం. ఈ విధంగా మొదట ''మధ్యగత తరగతి''ని గుర్తించాలి.

ఆ తర్వాత కింది సూత్రాన్ని ఉపయోగించి మధ్యగతాన్ని కనుక్కోవచ్చు.

మధ్యగతం $(M) = L + \frac{\left(\frac{N}{2} - F\right)}{f} \times C$

$L \rightarrow$ మధ్యగత తరగతి దిగువ అవధి.

$N \rightarrow$ పౌనఃపున్యాల మొత్తం.

$F \rightarrow$ మధ్యగత తరగతికి ముందు తరగతి ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం.

$f \rightarrow$ మధ్యగత తరగతి పౌనఃపున్యం.

$C \rightarrow$ తరగతి అంతరం.

ఉదాహరణ:

కింది దత్తాంశానికి మధ్యగతాన్ని కనుక్కోండి?

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం
0–20	9
20–40	16
40–60	24
60–80	15
80–100	4
100–120	2
మొత్తం	N = 70

సమాధానం:

దత్తాంశం నుంచి పౌనఃపున్యాల మొత్తం

N = 70.

$\frac{N}{2} = \frac{70}{2} = 35.$

కాబట్టి ''35''వ రాశి ఉండే తరగతి మధ్యగత తరగతి అవుతుంది.

కింది పౌనఃపున్య పట్టికను తయారుచేయాలి.

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం	ఆరోహణా సంచిత పౌనఃపున్యం
0–20	9	9
20–40	16	25
*40–60	24	49
60–80	15	64
80–100	4	68
100–120	2	70
మొత్తం	N = 70	

పై పట్టిక నుంచి '35'వ రాశి 40–60 తరగతిలో ఉంది. కాబట్టి ఇది మధ్యగత తరగతి అవుతుంది.

∴ L = 40 – 60 తరగతి దిగువ అవధి = 40,

$N = 70,$

$F = 25,$

$f = 24$

$C = 20.$

మధ్యగతం =

$$L + \frac{\left(\frac{N}{2} - F\right)}{f} \times C$$

$$= 40 + \frac{\left(\frac{70}{2} - 25\right)}{24} \times 20$$

$$= 40 + \frac{10 \times 20}{24} = 48.3$$

∴ ఇచ్చిన దత్తాంశం మధ్యగతం = 48.3

బాహుళకం (Mode)

ఏదైనా ఒక దత్తాంశంలో తరచుగా వచ్చే రాశిని ''బాహుళకం'' అని అంటారు. లేదా దత్తాంశంలో అన్నింటికంటే ఎక్కువ పౌనఃపున్యం ఉన్న అంశాన్ని బాహుళకం అని అంటారు.

ధర్మాలు:

1. దత్తాంశానికి బాహుళకం ఉండొచ్చు లేదా ఉండకపోవచ్చు.

2. ఒక దత్తాంశానికి ఒకటి కంటే ఎక్కువ బాహుళకాలు కూడా ఉండొచ్చు.

ఉదాహరణ:

ఎ) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 అనే దత్తాంశానికి బాహుళకం లేదు.

బి) 6, 5, 4, 4, 3, 1, 4, 5, 1, 4, 9 అనే దత్తాంశానికి బాహుళకం = ''4''. ఎందుకంటే '4' అనే రాశి ఎక్కువసార్లు పునరావృతమైంది. దత్తాంశానికి ఒకే బాహుళకం ఉంటే దాన్ని ఏక బాహుళకం (Uni–modal) అని అంటారు.

సి) 4, 5, 5, 3, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 7 అనే దత్తాంశానికి బాహుళకాలు = '2', '5'. ఎందుకంటే 2, 5, రెండూ కూడా మూడుసార్లు పునరావృతమయ్యాయి. ఈ విధంగా రెండు బాహుళకాలు ఉంటే దాన్ని ద్విబాహుళకం (Bi-modal) అని అంటారు.

పౌనఃపున్య పట్టికకు బాహుళకం కనుక్కోవడం:

మొదట ఇచ్చిన పౌనఃపున్య పట్టికలో బాహుళక తరగతిని గుర్తించాలి. అత్యధిక పౌనఃపున్యం ఉన్న తరగతిని బాహుళక తరగతి అంటారు.

బాహుళకం = $L+\frac{(f-f_1)}{(2f-f_1-f_2)}\times C$

L – బాహుళక తరగతి దిగువ అవధి.

f – బాహుళక తరగతి పౌనఃపున్యం.

f_1 – బాహుళక తరగతి ముందు తరగతి పౌనఃపున్యం.

f_2 – బాహుళక తరగతి తర్వాత తరగతి పౌనఃపున్యం.

C – బాహుళ తరగతి అంతరం.

ముఖ్య గమనిక:

బాహుళక తరగతి మొదటి తరగతి అయితే అప్పుడు $f_1 = 0$. అలాగే బాహుళక తరగతి చివరి తరగతి అయితే అప్పుడు $f_2 = 0$ అవుతుంది. ఒక పౌనఃపున్య పట్టికకు రెండు లేదా ఎక్కువ బాహుళక తరగతులు కూడా ఉండొచ్చు.

ఉదాహరణ:

కింది పౌనఃపున్య పట్టికకు బాహుళకం కనుక్కోండి.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
10–19	10
20–29	22
30–39	24

40–49	30
50–59	10
60–69	4

సమాధానం: దత్తాంశంలోని పౌనఃపున్య పట్టికలోని తరగతులు విలీన/అంతర్గత పద్ధతిలో ఉన్నాయి. ముందు వీటిని మినహాయింపు/బహిర్గత పద్ధతి లోకి మార్చి రాస్తే కింది పౌనఃపున్య విభాజనం నిర్మితమవుతుంది.

మార్కులు	**విద్యార్థుల సంఖ్య**
9.5–19.5	10
19.5–29.5	22
29.5–39.5	24
39.5–49.5	30
49.5–59.5	10
59.5–69.5	4
మొత్తం	**100**

పై పట్టిక నుంచి అత్యధిక పౌనఃపున్యం (30) 39.5–49.5 అనే తరగతిలో ఉంది. కాబట్టి ఇది బాహుళక తరగతి అవుతుంది. ఇప్పుడు

బాహుళకం = $L + \frac{(f - f_1)}{(2f - f_1 - f_2)} \times C$

పై పట్టిక నుంచి

$L = 39.5, \quad f = 30$

$f_1 = 24, f_2 = 10, C = 10$

∴ బాహుళకం =

$39.5 + \frac{(30 - 24)}{(2 \times 30 - 24 - 10)} \times 10$

$= 39.5 + \frac{6 \times 10}{26}$

$= 39.5 + \frac{30}{13} = 39.5 + 2.3 = 41.8$

∴ ఇచ్చిన దత్తాంశం బాహుళకం = 41.8

వివరణ: బాహుళకం అంటే బహుళ ఆదరణ పొందిన రాశి అని అర్థం. అంటే పై ఉదాహరణలో మొత్తం 100 మంది విద్యార్థుల్లో ఎక్కువ మంది మార్కులు 41.8 వద్ద కేంద్రీకృతమై ఉన్నాయని అర్థం. (Point

of concentration).

ఉదాహరణ:

కింది దత్తాంశానికి బాహుళకాలను కనుక్కోండి

నెల ఆదాయం (రూ.లలో)	కుటుంబాల సంఖ్య
2000 కంటే తక్కువ	2
4000 కంటే తక్కువ	32
6000 కంటే తక్కువ	42
8000 కంటే తక్కువ	49
10,000 కంటే తక్కువ	60
12,000 కంటే తక్కువ	90
14,000 కంటే తక్కువ	100

సమాధానం: దత్తాంశంలోని పౌనఃపున్య పట్టికను మినహాయింపు లేదా బహిర్గత పద్ధతిలో తరగతు లను తీసుకొని పునర్నిర్మిస్తే

నెల ఆదాయం (రూ.లలో)	కుటుంబాల సంఖ్య
0 – 2,000	2
2,000 – 4,000	32–2 = 30
4,000 – 6,000	42–32 = 10
6,000 – 8,000	49–42 = 7
8,000 – 10,000	60–49 = 11
10,000 – 12,000	90–60 = 30
12,000 – 14,000	100–90 = 10
మొత్తం	100

ఈ పౌనఃపున్య పట్టికలో అత్యధిక పౌనఃపున్యం (30) 2,000–4,000, 10,000–12,000 అనే రెండు తరగతుల్లో ఉన్నాయి. కాబట్టి ఈ రెండు తరగతులూ బాహుళక తరగతులవుతాయి.

Case – 1:

2,000–4,000ను బాహుళక తరగతి అనుకొంటే...

బాహుళకం = $L + \frac{(f - f_1)}{(2f - f_1 - f_2)} \times C$

$L = 2{,}000,$

$f = 30, \quad f_1 = 2, \quad f_2 = 10, \quad C = 2,000$

∴ బాహుళకం =

$$2,000 + \frac{(30-2)}{(2\times30-2-10)}\times 2,000$$

$$= 2,000 + \frac{28\times 2,000}{48} = 2,000 + \frac{14,000}{12}$$

= 2,000 + 1,166.66 = 3,166.66

∴ బాహుళకం = రూ. 3,166.66

Case – 2:

10,000 – 12,000ను బాహుళక తరగతిగా తీసుకుంటే...

$L = 10,000, \quad f = 30,$

$f_1 = 11, \quad f_2 = 10, C = 2,000$

∴ బాహుళకం =

$$= 10,000 + \frac{(30-11)}{(2\times30-11-10)}\times 2,000$$

$$= 10,000 + \frac{19\times 2,000}{39} = 10,000 + \frac{38,000}{39}$$

= 10,000 + 976.15 = 10,976.15

∴ బాహుళకం = రూ. 10,976.15

ౙకాబట్టి ఇచ్చిన పౌనఃపున్య విభాజనానికి రెండు బాహుళకాలు ఉన్నాయని చెప్పొచ్చు. అవి రూ. 3,166.66, రూ. 10,976.15.

సాంఖ్యక శాస్త్రం 4

విస్తరణ కొలతలు

దత్తాంశాన్ని సరిగ్గా అవగాహన చేసుకోవాలంటే ఆ దత్తాంశ కేంద్ర స్థానం కొలత (సగటు)తో పాటు ఆ దత్తాంశంలోని రాశులు ఏ విధంగా విస్తరించి ఉన్నాయో కూడ తెలుసుకోవాలి. కింది ఉదాహరణను పరిశీలిస్తే దత్తాంశం విస్తరణ కొలతల ఆవశ్యకత మనకు అర్థమవుతుంది.

ఉదాహరణ:

'A' అనే కంపెనీలోని ఆరుగురు ఉద్యోగుల జీతాలు రూ. 500, రూ. 500, రూ. 2,000, రూ. 3,000, రూ. 4,000, రూ. 20,000. 'B' అనే కంపెనీలోని ఆరుగురు ఉద్యోగుల జీతాలు రూ. 4,000, రూ. 3,500, రూ. 4,500, రూ. 6,000, రూ. 5,500, రూ. 6,500. ఉద్యోగంలో చేరాలనుకొనే అభ్యర్థి ఈ రెండు కంపెనీల్లో దేన్ని ఎంపిక చేసుకోవాలి?

సమాధానం:

'A' అనే కంపెనీలో ఉద్యోగుల సగటు జీతం =

$$\frac{\text{అందరి జీతాల మొత్తం}}{\text{ఉద్యోగుల సంఖ్య}}$$

$$= \frac{500 + 500 + 2000 + 3000 + 4000 + 20000}{6}$$

$$= \frac{30,000}{6}$$ = రూ. 5,000

అదేవిధంగా, 'B' అనే కంపెనీలోని ఉద్యోగుల సగటు జీతం =

$$= \frac{4000 + 3500 + 4500 + 6000 + 5500 + 6500}{6}$$

$$= \frac{30,000}{6}$$ = రూ. 5,000.

∴ రెండు కంపెనీల్లో కూడా ఉద్యోగుల సగటు జీతాలు సమానం. కానీ 'A' అనే కంపెనీలోని జీతాలు ఎక్కువ పరిధిలో (రూ।। 500 – 20,000) విస్తరించి ఉన్నాయి. కాబట్టి ఉద్యో గార్థి 'B' అనే కంపెనీని ఎంపిక చేసుకోవచ్చు .

కాబట్టి ఒక దత్తాంశం గురించి సరైన నిర్ణయం తీసుకోవాలంటే ఆ దత్తాంశం విస్తరణ కొల తల గురించి

అవగాహన అవసరం. ఎందు కంటే సగటు విపరీత అంశాలతో ప్రభావితం అవుతుంది.

దత్తాంశ విస్తరణను కొలవడానికి ముఖ్యంగా మూడు రకాల కొలతలు అందుబాటులో ఉన్నాయి. అవి :

1. వ్యాప్తి **(Range)**

2. ప్రామాణిక విచలనం (Standard deviation)

3. మాధ్యమ విచలనం (Mean deviation)

1. వ్యాప్తి:– దత్తాంశంలోని గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువల మధ్య బేధాన్ని వ్యాప్తి అంటారు. పై ఉదాహరణలో 'A' అనే కంపెనీలోని జీతాలకు సంబంధించిన వ్యాప్తి = 20, 000–500 = రూ,, 19,500.

'B' అనే కంపెనీలోని జీతాల వ్యాప్తి

= 6,500 – 3,500 = రూ,, 3,000.

∴ 'A' అనే కంపెనీలో జీతాల వ్యాప్తి ఎక్కువ.

గమనిక: దత్తాంశంలో విస్తరణను సులభంగా, ఉజ్జాయింపుగా కొలవడానికి వ్యాప్తి ఉపయోగపడుతుంది. అయితే విస్తరణను కచ్చితంగా కొలవడానికి వ్యాప్తి సరిపోదు.

2. మాధ్యమ విచలనం: దీనినే సగటు విచలనం అని కూడా అంటారు. సగటు లేదా అంకమధ్యమం నుంచి ఆయా రాశుల విచలనాల సగటునే మాధ్యమ విచలనం అని అంటారు.

$X_1, X_2, X_3,$----X_n అనే ''n' రాశుల సగటు లేదా అంకమధ్యం $\bar{x}$ అనుకొంటే సగటు నుంచి ఆయా రాశుల విచలనాలు =

$|x_1 - \bar{x}|, |x_2 - \bar{x}|, |x_3 - \bar{x}|,$

$---- |x_n - \bar{x}|.$

∴ సగటు విచలనం =

$$\frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + --- + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

$$= \frac{\Sigma|x_i - \bar{x}|}{n}$$

గమనిక: ఒక దత్తాంశం మాధ్యమ విచలనం తక్కువగా ఉంటే ఆ దత్తాంశపు విస్తరణ తక్కువ ఉన్నట్లు.

ఉదాహరణ:– A, B అనే రెండు యంత్రాలు బిస్కెట్లను ప్యాక్ చేయడానికి వాడుతున్నారు. రెండు యంత్రాలు ప్యాక్ చేసిన 10 శ్యాంపిల్ ప్యాకెట్ల బరువులు కింది విధంగా ఉన్నాయి (గ్రాముల్లో).

A – 196, 198, 198, 199, 200, 200, 201, 201, 202, 205

B – 192, 194, 195, 198, 200, 201, 203, 204, 206, 207.

మాధ్యమ విచలనాన్ని ఉపయోగించి రెండు యంత్రాల్లో ఏది నమ్మశక్యమైందో కను క్కోండి?

Answer:

'A' అనే యంత్రానికి సంబంధించిన 10 శాంపిల్ ప్యాకెట్ల సగటు బరువు =

$\frac{196+198+---+202+205}{10}$

$\Rightarrow \bar{x} = \frac{2000}{10} = 200$ గ్రాములు

మాధ్యమ విచలనం = $\frac{\Sigma|x_i - \bar{x}|}{n}$

సగటు $\bar{x}$ నుంచి ఆయా రాశుల విచలనాలు

= |196–200|,|198–200|,–––|202 – 200|,

|205 – 200|

= 4, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 2, 5.

∴ మాధ్యమ విచలనం =

$\frac{4+2+2+1+0+0+1+1+2+5}{10}$

$= \frac{18}{10} = 1.8 \rightarrow (1)$

ఇదే విధంగా 'B' అనే యంత్రపు శాంపిల్ ప్యాకెట్ల సగటు బరువు= $\frac{192+194+,,,,+206+207}{10}$

$\Rightarrow \bar{x} = \frac{2000}{10} = 200$ గ్రాములు

సగటు ($\bar{x}$) నుంచి ఆయా రాశుల విచలనాలు

= |192 – 200|, |194 – 200 |,,, |206 – 200 |, | 207 –200 |

= 8, 6, 5, 2, 0, 1, 3, 4, 6, 7

∴ మాధ్యమ విచలనం =

$\frac{8+6+5+2+0+1+3+4+6+7}{10}$

$= \frac{42}{10} = 4.2 \rightarrow (2)$

1, 2ల నుంచి 'A' అనే కంపెనీ శాంపిల్ ప్యాకెట్ల మాధ్యమ విచలనం తక్కువగా ఉంది. కాబట్టి 'B' కంటే 'A' అనే యంత్రం నమ్మశక్యమైంది అని చెప్పవచ్చు.

గమనిక:– దత్తాంశం విస్తరణను కొలవడానికి వ్యాప్తి కంటే మాధ్యమ విచలనాన్ని కచ్చిత మైన కొలతగా పరిగణించవచ్చు.

3. **ప్రామాణిక విచలనం:** మధ్యమం లేదా సగటు నుంచి ఆయా రాశుల భేదాల వర్గాల మాధ్యమాన్ని విస్తృతి అంటారు. దీనిని "a^2' అనే గ్రీకు అక్షరంలో సూచిస్తాం. విస్తృతి ధనాత్మక వర్గమూలాన్నే

ప్రామాణిక విచలనం అంటాం.

$x_1, x_2, x_3, - x_n$ అనే "n' అనుకొంటే, ఇప్పుడు విస్తృతి ప్రామాణిక విచలనాలను కనుగొందాం.

రాశులు విచలనాలు **విచలనాల వర్గాలు**

x_1 $x_1 - \bar{x}$ $(x_1 - \bar{x})^2$

x_2 $x_2 - \bar{x}$ $(x_2 - \bar{x})^2$

x_3 $x_3 - \bar{x}$ $(x_3 - \bar{x})^2$

, , ,

, , ,

, , , x_n $x_n - \bar{x}$ $(x_n - \bar{x})^2$

ఇప్పుడు విస్తృతి (σ^2)=

$$\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

విస్తృతి ధనాత్మక వర్గమూలమే ప్రామాణిక విచలనం.

ప్రామాణిక విచలనం $(S.D) = +\sqrt{\sigma^2}$

$$\therefore \sigma = \frac{+\sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 +,,, + (x_n - \bar{x})^2}}{n}$$

$$+\frac{\sqrt{\Sigma} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

ఉదాహరణ:

కింది దత్తాంశం విస్తృతి, ప్రామాణిక విచలనాలను కనుక్కోండి?

40, 50, 60, 50, 40.

Answer: దత్తాంశంలో ఇచ్చిన 5 రాశుల సగటు $\bar{x} = \frac{40 + 50 + 60 + 50 + 40}{5}$

$$= \frac{240}{5} = 48$$

రాశులు విచలనాలు విచలనాల

వర్గాలు

40 $40-48=-8\ (-8)^2=64$

50 $50-48=2\ (2)^2=4$

60 $60-48=12\ (12)^2=144$

50 $50-48=2\ (2)^2=4$

40 $40-48=-8\ (-8)^2=64$

విస్తృతి $(\sigma^2)=\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}$

విస్తృతి $\frac{64+4+144+64+4}{5}$

$=\frac{280}{5}=56$

విస్తృతి $(\sigma^2)=56$

ప్రామాణిక చలనం $(\sigma)+\sqrt{56}$ =7.52

విచలన గుణకం **(coefficient of variation):** దత్తాంశంలోని విస్తరణను కొలవడా నికి కచ్చితమైన కొలతగా విచలన గుణకం ఉపయోగపడుతుంది. విచలనగుణకం =

$$\frac{\text{ప్రామాణిక విచలనం}}{\text{అంకమధ్యమం}} \times 100$$

రెండు దత్తాంశాల నిలకడ (consistency) లను పోల్చడానికి విచలన గుణకం ఉపయోగపడుతుంది. విచలన గుణకం తక్కువ ఉన్న దత్తాంశంలో నిలకడ ఎక్కువ ఉన్నట్లు.

ఉదాహరణ:

కింది పట్టికలో A, B అనే ఇద్దరు బ్యాట్స్‌మెన్‌ల పరుగులు అయిదు మ్యాచ్‌లలో ఇచ్చారు.

A – 40, 50, 60, 40, 50

B – 100, 120, 5, 5, 10

నీవు జట్టులోకి ఎవరిని ఎంపిక చేస్తావు? ఎందుకు?

(Civil Services Mains, 1991)

Answer: 'A' బ్యాట్స్‌మెన్ సగటు పరుగులు

$\frac{40+50+60+40+50}{5}$

$=\frac{240}{5}=48$

అలాగే 'B' సగటు పరుగులు $=\frac{100+120+5+5+10}{5}$ $=\frac{240}{5}=48$

ఇద్దరు ఆటగాళ్ల సగటు పరుగులు సమానంగా ఉన్నాయి కాబట్టి ఇద్దరిలో ఎవరు నిలకడైన ఆటగాడో చూడాలి.

A బ్యాట్స్‌మెన్ విచలనగుణకం:-

రాశులు	విచలనాలు	విచలనాల వర్గాలు
40	40-48=-8	$(-8)^2$= 64
50	50-48= 2	$(2)^2$ = 4
60	60-48=12	$(12)^2$= 144
40	40-48=-8	$(-8)^2$= 64
50	50-48= 2	$(2)^2$ = 4

A ప్రామాణిక విచలనం = $= \frac{\sqrt[+]{64+4+144+64+4}}{5}$

$= \frac{\sqrt[+]{280}}{5} = \sqrt[+]{56}$ =7.52

A విచలన గుణకం =

$\frac{7.52}{48} \times 100 = 15.625$

B - బ్యాట్స్‌మెన్ విచలన గుణకం:

రాశులు	విచలనాలు	విచలనాల వర్గాలు
100	100-48 = 52	$(52)^2$ = 2704
120	120-48 = 72	$(72)^2$ = 5184
5	5-48 = -43	$(-43)^2$ = 1849
5	5-48 = -43	$(-43)^2$ = 1849
10	10-48 = -38	$(-38)^2$= 1444

B ప్రామాణిక విచలనం

$= \frac{\sqrt[+]{2704+5184+1849+1849+1444}}{5}$

$= \sqrt[+]{\frac{13030}{5}} = \sqrt[+]{2606} = 51.05$

B విచలన గుణకం =

$\frac{51.05}{48} \times 100$

= 106.35

1, 2ల నుంచి 'B' కంటే A విచలన గుణకం తక్కువ. అంటే B కంటే 'A' నిలకడైన ఆటగాడు. కాబట్టి జట్టులోకి 'A' అనే ఆటగాణ్ణి ఎంపిక చేస్తాను.

సాంఖ్యక శాస్త్రం-5

ప్రామాణిక విచలనం, విచలన గుణకం, నిలకడ మొదలైన వాటి గురించి గతంలో చర్చించాం. వీటికి సంబంధించిన మరికొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

1. 'X', 'Y' అనే బంతిని కొట్టే ఆటగాళ్ల పరుగులు ఆరు క్రికెట్ ఆటల్లో కింది విధంగా ఉన్నాయి.

X : 75, 21, 65, 60, 45, 41

Y : 68, 44, 75, 68, 63, 71

ఎవరి సామర్థ్యం ఎక్కువగా ఉంది? ఎందుకు?

(ఏపీపీఎస్సీ, గ్రూప్-1, మోడల్ పేపర్-2007)

సమాధానం:

$$\text{సగటు} = \frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$$

అనే సూత్రాన్ని అనుసరించి, 6 మ్యాచ్‌ల్లో 'X' అనే బ్యాట్స్‌మెన్ సగటు పరుగులు

$$\bar{x} = \frac{75+21+65+60+45+41}{6}$$

$$= \frac{307}{6} = 51.16$$

అదేవిధంగా 'Y' బ్యాట్స్‌మెన్ సగటు పరుగులు

$$\bar{y} = \frac{68+44+75+68+63+71}{6}$$

$$= \frac{389}{6} = 64.83$$

' X' కంటే 'Y' సగటు ఎక్కువ కాబట్టి 'Y' అనే బ్యాట్స్‌మెన్ సామర్థ్యం ఎక్కువ అని చెప్పొచ్చు.

సగటుతో పాటు 'నిలకడ'ను కూడా పరిశీలిద్దాం.

'X' విచలన గుణకం:

ప్రామాణిక విచలనం =

$$\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}}$$

రాశులు (x_i)	**విచలనాలు** $(x_i-\bar{x})$	**విచలనాల వర్గాలు** $(x_i-\bar{x})^2$
75	23.84	568.3456
21	−31.16	970.9456
65	13.84	191.5456
60	8.84	78.1456
45	−6.16	37.9456
41	−10.16	103.2256
	మొత్తం =	1950.1536

∴ ప్రామాణిక విచలనం =

$$\sqrt{\frac{1950.1536}{6}}$$

$=\sqrt{325.0256}$

= 18.028

విచలన గుణకం =

$$\frac{\text{ప్రామాణిక విచలనం}}{\text{సగటు}} \times 100$$

∴ 'X' విచలన గుణకం = $\frac{18.028}{51.16}\times 100$

$= 35.23931 \rightarrow (1)$

'Y' విచలన గుణకం

రాశులు (y_i)	**విచలనాలు** $(y_i-\bar{y})$	**విచలనాల వర్గాలు** $(y_i-\bar{y})^2$
68	3.17	10.0489

44 –24.83 616.5289

75 10.17 103.4289

68 3.17 10.0489

63 –1.83 3.3489

71 6.17 38.0689

మొత్తం = 781.4734

∴ ప్రామాణిక విచలనం =

$$\sqrt{\frac{781.4734}{6}}$$

$$= \sqrt{130.2455}$$

= 11.4125

'Y' విచలన గుణకం = $\frac{11.4125}{64.83} \times 100$

= 17.60376 → (2)

(1) & (2) ల నుంచి 'X' కంటే 'Y' విచలన గుణకం తక్కువ కాబట్టి 'X' కంటే 'Y' అనే ఆటగాడిలో నిలకడ ఎక్కువ. కాబట్టి సగటు రీత్యా, నిలకడ రీత్యా 'X' కంటే 'Y' మెరుగ్గా ఉన్నాడు.

∴ 'X' 'కంటే 'Y సామర్థ్యం ఎక్కువ.

గమనిక:

నిజానికి ఈ ప్రశ్నలో విచలన గుణకాలు కనుక్కోవాల్సిన అవసరం లేదు. 'X' కంటే 'Y' సగటు ఎక్కువ కాబట్టి 'Y' సామర్థ్యం ఎక్కువ అని చెప్పొచ్చు. ఇద్దరి సగటులు సమానం అయినప్పుడు మాత్రమే ఇద్దరిలో ఎక్కువ నిలకడగా ఆడేది ఎవరు అన్న దానిని పరిగణనలోకి తీసుకొంటాం.

ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనం: (combined S.D)

మొదటి గ్రూపు :

రాశుల సంఖ్య = N_1, సగటు = X_1

ప్రామాణిక విచలనం = σ_1

రెండో గ్రూపు:

రాశుల సంఖ్య N_2, సగటు = X_2

ప్రామాణిక విచలనం = σ_2

రెండు గ్రూపుల ఉమ్మడి సగటు = X,

ప్రామాణిక విచలనం = σ అనుకొంటే

$X - X_1 = d_1,$

$X - X_2 = d_2$

అప్పుడు

$$\sigma^2 = \frac{N_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{N_1 + N_2}$$

లేదా

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{N_1 + N_2}}$$

పై సూత్రాన్ని ఉపయోగించి ఉమ్మడి విస్తృతిని కూడా కనుక్కోవచ్చు.

2. 60 రాశుల సగటు, విస్తృతులు వరుసగా 10, 4. ఈ 60 రాశుల్లో 40 రాశుల సగటు, విస్తృతులు వరుసగా 11, 2.25. అయితే మిగిలిన 20 రాశుల సగటు, విస్తృతులను కనుక్కోండి?

(Civil Services, Mains – 2003)

సమాధానం:

దత్తాంశం ప్రకారం

$N_1 = 40, \; X_1 = 11, \sigma_1^2 = 2.25$

$X = 10, \sigma^2 = 4.$

మిగిలిన 20 రాశుల సగటు, విస్తృతులను వరుసగా X_2, σ_2^2 అనుకొంటే అప్పుడు $N_2 = 20.$

ఉమ్మడి సగటు $X = \dfrac{N_1X_1 + N_2X_2}{N_1 + N_2}$ అనే సూత్రాన్ని అనుసరించి

$$10 = \frac{40 \times 11 + 20X_2}{40 + 20}$$

$\Rightarrow 10 \times 60 = 440 + 20X_2$

$\Rightarrow 20X_2 = 600 - 440 = 160$

$\Rightarrow \; X_2 = \dfrac{160}{20} = 8$

∴ మిగిలిన 20 రాశుల సగటు = 8.

అదేవిధంగా

$$\sigma^2 = \frac{N_1(\sigma_1^{\,2} + d_1^{\,2}) + N_2(\sigma_2^{\,2} + d_2^{\,2})}{N_1 + N_2}$$

అనే సూత్రాన్ని అనుసరించి,

$d_1 = X_1 - X = 11 - 10 = 1,$

$d_2 = X_2 - X = 8 - 10 = -2$

ఇప్పుడు పై సూత్రాన్ని అనుసరించి

$$4 = \frac{40(2.25 + 1) + 20(\sigma_2^{\,2} + 4)}{40 + 20}$$

$\Rightarrow 4 \times 60 = 130 + 20\sigma_2^{\,2} + 80$

$\Rightarrow 240 = 210 + 20\sigma_2^{\,2}$

$\Rightarrow 20\sigma_2^{\,2} = 240 - 210 = 30$

$$\Rightarrow \sigma_2^{\,2} = \frac{30}{20} = 1.5$$

$\therefore$ మిగిలిన 20 రాశుల విస్తృతి = 1.5

పౌనఃపున్య విభాజనానికి ప్రామాణిక విచలనం కనుగొనటం:

ఇచ్చిన పౌనఃపున్య విభాజనలో తరగతుల మధ్య విలువలు వరుసగా $m_1, m_2, ...m_n$, తరగతుల పౌనఃపున్యాలు వరుసగా $f_1, f_2, ...f_n$,
అనుకుంటే, ఆ పౌనఃపున్య విభాజనం సగటు $\bar{x}$ అనుకుంటే

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i m_i}{\sum f_i}$$

ప్రామాణిక విచలనం

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (m_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$$

అలాగే ఆ పౌనఃపున్య విభాజనం విస్తృతిని కూడా కనుక్కోవచ్చు.

3. కింది పౌనఃపున్య పట్టిక సగటు, ప్రామాణిక విచలనాలను కనుక్కోండి?

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
5 – 10	2

10 – 15	9
15 – 20	29
20 – 25	54
25 – 30	6
మొత్తం	100

సమాధానం:

సగటు $\bar{x} = \frac{\sum f_i m_i}{\sum f_i}$

$$= \frac{2\times7.5 + 9\times12.5 + 29\times17.5 + 54\times22.5 + 6\times27.5}{100}$$

$$= \frac{15 + 112.5 + 507.5 + 1215 + 165}{100}$$

$$= \frac{2015}{100} = 20.15$$

ప్రామాణిక విచలనం =

$$\sqrt{\frac{\sum f_i (m_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\times160 + 9\times58.5 + 29\times7 + 54\times5.5 + 6\times54}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{320 + 527 + 204 + 298 + 324}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{1673}{100}} = \sqrt{16.73} = 4.09$$

$\therefore$ ఇచ్చిన పౌనఃపున్య పట్టిక సగటు = 20.15

ప్రామాణిక విచలనం = 4.09

అలాగే ఈ పౌనఃపున్య పట్టిక విచలన గుణకాన్ని కనుక్కోవచ్చు.

విచలన గుణకం = $\frac{4.09}{20.15} \times 100$

$= 20.2977$

పౌనఃపున్య విభాజనం మాధ్యమ విచలనం:

మాధ్యమ విచలనం = $\frac{\sum f_i \left(\left|m_i - \bar{x}\right|\right)}{\sum f_i}$

పై ఉదాహరణలోని పౌనఃపున్య విభాజనం మాధ్యమ విచలనాన్ని కనుగొందాం.

మాధ్యమ విచలనం =

$$\frac{2\left|-12.65\right| + 9\left|-7.65\right| + 29\left|-2.65\right| + 54\left|2.35\right| + 6\left|7.35\right|}{100}$$

$$= \frac{25.3 + 68.85 + 76.85 + 126.9 + 44.1}{100}$$

$= 3.42$

సాంఖ్యక శాస్త్రం-6

ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనం

గత సంచికలో ప్రామాణిక విచలనాన్ని ఏ విధంగా గణించాలో చర్చించాం. ఈ సంచికలో ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనం, రాశులను పొరపాటుగా తీసు కున్నప్పుడు సరైన ప్రామాణిక విచలనాన్ని కనుక్కో వడం అనే అంశాల గురించి చర్చిద్దాం.

ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనం:

మొదటి సమూహంలోని రాశుల సంఖ్య = N_1,

వాటి అంకమధ్యమం = X_1,

ప్రామాణిక విచలనం = σ_1,

రెండో సమూహంలోని రాశుల సంఖ్య = N_2,

వాటి అంకమధ్యమం = X_2,

ప్రామాణిక విచలనం = σ_2 అనుకొంటే...

ఇప్పుడు మొదట పై రెండు సమూహాల ఉమ్మడి అంకమధ్యమం (X) కనుక్కోవాలి.

$$X = \frac{N_1X_1 + N_2X_2}{N_1 + N_2}$$

$d_1 = X_1 - X$,

$d_2 = X_2 - X$ అని అనుకుంటే....

పై రెండు సమూహాల ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచ లనం (σ)ను కింది సూత్రం ద్వారా కనుక్కో వచ్చు.

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_1\left(\sigma_1^2 + d_1^2\right) + N_2\left(\sigma_2^2 + d_2^2\right)}{N_1 + N_2}}$$

పై రెండు సమూహాల ఉమ్మడి విస్తృతి

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{N_1\left(\sigma_1^2 + d_1^2\right) + N_2\left(\sigma_2^2 + d_2^2\right)}{N_1 + N_2}}$$

పై సూత్రాలను ఎన్ని సమూహాలకు అయినా అదే పద్ధతిలో విస్తరించి రాసుకోవచ్చు.

ఉదాహరణ:

150 మంది విద్యార్థులున్న ఒక తరగతి సగటు బరువు 60 కేజీలు. ఆ తరగతిలోని బాల, బాలికల సగటు బరువులు వరుసగా 70, 55 కేజీలు. వారి బరువుల ప్రామాణిక విచలనాలు వరుసగా 10, 15 కేజీలు. అయితే ఆ తరగతిలోని బాలుర సంఖ్య ఎంత? మొత్తం తరగతి ప్రామాణిక విచలనం ఎంత?

సమాధానం:

తరగతి బాలుర సంఖ్య = b అనుకుంటే...

బాలికల సంఖ్య = 150 – b అవుతుంది.

బాలురను మొదటి సమూహంగానూ, బాలికలను రెండో సమూహంగానూ పరిగణించినట్లయితే,

$N_1 = b, \quad X_1 = 70$ Kgs,

$\sigma_1 = 10$ Kgs,

$N_2 = 150 - b, X_2 = 55$ Kgs,

$\sigma_2 = 15$ Kgs.

రెండు సమూహాల ఉమ్మడి సగటు బరువు (X) = 60 కేజీలు

కాని ఉమ్మడి సగటు $X = \frac{N_1X_1 + N_2X_2}{N_1 + N_2}$

$$\Rightarrow 60 = \frac{b \times 70 + (150 - b) \times 55}{b + 150 - b}$$

$\Rightarrow 60 \times 150 = 70b + 8{,}250 - 55b$

$\Rightarrow 15b = 9{,}000 - 8{,}250 = 750$

$\Rightarrow b = 750/15 = 50$

$\therefore$ తరగతిలోని బాలుర సంఖ్య $(N_1) = 50$

అలాగే బాలికల సంఖ్య $(N_2)=100$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు మొత్తం తరగతి ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనాన్ని కనుగొందాం.

$d_1 = X_1 - X = 70 - 60 = 10$

$d_2 = X_2 - X = 55 - 60 = -5$

$\Rightarrow d_1^2 = 100, d_2^2 = 25$ అలాగే...

$\sigma_1^2 = 100, \sigma_2^2 = 225$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనం,

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{N_1 + N_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{50(100 + 100) + 100(225 + 25)}{50 + 100}}$$

$$= \sqrt{\frac{50 \times 200 + 100 \times 250}{150}}$$

$$= \sqrt{\frac{10{,}000 + 25{,}000}{150}}$$

$= \sqrt{\frac{35,000}{150}} = \sqrt{233.33}$

$= 15.275$

∴ మొత్తం తరగతి ప్రామాణిక విచలనం

= 15.275 కేజీలు.

గమనిక:

1. విభిన్న సమూహాల ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచ లనం ఆయా సమూహాల వ్యక్తిగత ప్రామాణిక విచలనాల్లో గరిష్ఠ ప్రామాణిక విచలనం కంటే ఎక్కువ ఉంటుంది.
2. మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల ప్రామాణిక విచలనం

$$= \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$$

ఉదాహరణ:

60 రాశులున్న ఒక సమితి అంకమధ్యమం, విస్తృతులు వరుసగా 10, 4. ఈ సమితిలోని 40 రాశుల అంకమధ్యమం, విస్తృతులు వరుసగా 11, 2.25 అయితే మిగిలిన 20 రాశుల అంకమధ్యమం, విస్తృతులను కనుక్కోండి.

(సివిల్ సర్వీసెస్, మెయిన్స్, 2003)

సమాధానం:

40 రాశులను మొదటి సమూహంగా, మిగిలిన 20 రాశులను రెండో సమూహం గానూ భావిద్దాం. అప్పుడు..

$N_1 = 40,\ X_1 = 11,\ \sigma_1^2 = 2.25$

$N_2 = 20,\ X_2 = ?,\ \sigma_2^2 = ?$

ఉమ్మడి సగటు $X = 10$, ఉమ్మడి విస్తృతి

$\sigma^2 = 4$ కాని ఉమ్మడి సగటు

$$X = \frac{N_1X_1 + N_2X_2}{N_1 + N_2}$$

$$\Rightarrow 10 = \frac{40 \times 11 + 20X_2}{40 + 20}$$

$\Rightarrow 10 \times 60 = 440 + 20\ X_2$

$\Rightarrow 20\ X_2 = 600 - 440 = 160$

$\Rightarrow X_2 = 160/20 = 8$

∴ మిగిలిన 20 రాశుల అంకమధ్యమం = 8

$d_1 = 11 - 10 = 1$

$d_2 = 8 - 10 = -2$

అలాగే... ఉమ్మడి విస్తృతి

$$\sigma^2 = \frac{N_1\left(\sigma_1^2 + d_1^2\right) + N_2\left(\sigma_2^2 + d_2^2\right)}{N_1 + N_2}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{40(2.25+1) + 20\left(\sigma_2^2 + 4\right)}{40+20}$$

$$\Rightarrow 4 \times 60 = 40 \times 3.25 + 20\sigma^2{}_2 + 80$$

$$\Rightarrow 20\sigma_2{}^2 = 240 - 80 - 130$$

$$\Rightarrow \sigma_2{}^2 = 30/20 = 1.5$$

$\therefore$ మిగిలిన 20 రాశుల విస్తృతి = 1.5

రాశులను పొరపాటుగా తీసుకోవడం:

ఈ అంశాన్ని చర్చించే ముందు వ్యక్తిగత శ్రేణులకు సంబంధించి ప్రామాణియ విచల నానికి మరొక సూత్రాన్ని గుర్తుంచుకోవాలి.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\bar{x}\right)^2}$$

ఇక్కడ 'n' అంటే వ్యక్తిగత శ్రేణిలోని రాశుల సంఖ్య

x_i అనేవి రాశులు,

$\bar{x}$ అనేది ఆ రాశుల అంకమధ్యమం

$$\Sigma x_i{}^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n{}^2$$

అంటే రాశుల వర్గాల మొత్తం.

పై సూత్రంలో ఇరువైపులా వర్గం చేస్తే

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\bar{x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \Sigma x_i^2 = n\left(\sigma^2 + \left(\bar{x}\right)^2\right)$$

అంటే రాశుల వర్గాల మొత్తం =

$$n\left(\sigma^2 + \left(\bar{x}\right)^2\right)$$

ఈ సూత్రాన్ని కూడా గుర్తుంచుకోవాలి.

ఉదాహరణ:

ఒక తరగతిలోని ‘9’ మంది విద్యార్థుల బరువుల సగటు, ప్రామాణిక విచలనాలు వరుసగా 43 కేజీలు, 5 కేజీలు ఆ తరగతిలోకి కొత్తగా 63 కేజీలు ఉండే విద్యార్థి చేరిన తర్వా త ఆ తరగతి సగటు బరువు, ప్రామాణిక విచలనాలు కనుక్కోండి.

సమాధానం:

దత్తాంశం ప్రకారం, ప్రారంభంలో తరగతిలోని '9' మంది విద్యార్థుల బరువుల మొత్తం = 43 × 9 = 387 కేజీలు.

63 కేజీల బరువుండే విద్యార్థి చేరిన తరువాత తరగతిలోని '10' మంది విద్యార్థుల బరువుల మొత్తం = 387 + 63 = 450 కేజీలు.

ధ $\Rightarrow$ ప్రస్తుతం, తరగతి సగటు బరువు $= \frac{450}{10}$ = 45 కేజీలు.

ప్రారంభంలో తరగతిలోని '9' మంది విద్యార్థుల బరువుల వర్గాల మొత్తం =

$= n\left(\sigma^2 + (\bar{x})^2\right)$

$= 9\,(5^2 + 43^2) = 16{,}866$

కొత్త విద్యార్థి చేరిన తర్వాత, 10 మంది విద్యార్థుల బరువుల వర్గాల మొత్తం

$\sum x_i^2 = 16{,}866 + 63^2$

$= 16866 + 3969 = 20835$

ఈ '10' మంది విద్యార్థుల బరువుల ప్రామాణిక విచలనం

$= \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2} \quad = \sqrt{\frac{20835}{10} - 45^2}$

$= \sqrt{2083.5 - 2025} \quad = \sqrt{58.5} = 7.65$

$\therefore$ తరగతి ప్రామాణిక విచలనం = 7.65 కేజీలు.

సాంఖ్యక శాస్త్రం-7

విస్తరణ కొలతలు

(Measures of Dispersion)

సగటు దత్తాంశం మొత్తానికి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది. అంటే ఒక దత్తాంశం సగటు తెలిస్తే, ఆ దత్తాంశం గురించి ప్రాథమిక అవగాహన ఏర్పడుతుంది. దత్తాంశం స్వభావాన్ని పూర్తిగా తెలుసుకోవాలంటే ఆ దత్తాంశంలోని రాశుల, సగటు మాత్రమే తెలిస్తే సరిపోదు. సగటుతో పాటు ఆ దత్తాంశంలో రాశులు ఏ విధంగా విస్తరించి ఉన్నాయో కూడా తెలిసి ఉంటే ఆ దత్తాంశం గురించి సరైన నిర్ణయాలు తీసుకునే వీలుంటుంది. ఈ అంశాన్ని ఒక ఉదాహరణ ద్వారా పరిశీలిద్దాం. A, B అనే రెండు కంపెనీల్లో పని చేస్తున్న 500 మంది ఉద్యోగుల వేతనాలు కింది విధంగా ఉన్నాయనుకోండి.

ఉద్యోగుల సంఖ్య	A కంపెనీలో ఒక్కొక్కరి జీతం (రూ.లలో)	B – కంపెనీలో ఒక్కొక్కరి జీతం (రూ.లలో)
100	1,000	4,000
100	2,000	6,000
100	2,500	5,000
100	1,500	5,500
100	18,000	4,500
మొత్తం=500		

ప్రతి కంపెనీలో 500 మంది ఉద్యోగులు పని చేస్తున్నారు. రెండు కంపెనీల్లోనూ ఒక ఉద్యోగి సగటు వేతనాన్ని కనుగొందాం.

A కంపెనీలో ఉద్యోగి సగటు వేతనం (₹ల్లో)=100×(1000+2000+2500+1500+18,000) / (100 +100 +100 +100 +100)

= 5,000

ఇదే విధంగా, B కంపెనీలో సగటు వేతనం = ₹. 5,000. అంటే A, B రెండు కంపెనీలలో కూడా సగటు వేతనాలు సమానంగా ఉన్నాయి. ఇప్పుడు ఈ రెండు కంపెనీల్లో ఏదో ఒక కంపెనీలో చేరాలని అనుకునే సగటు నిరుద్యోగి ఉన్నాడనుకోండి. అతనికి కేవలం ఆ రెండు కంపెనీల్లోని సగటు వేతనాలు మాత్రమే తెలిస్తే ఆ రెండు కంపెనీల్లో ఉద్యోగుల వేతనాలు సమాన స్థాయిలోనే ఉన్నాయని అనుకునే ప్రమాదముంది. రెండు కంపెనీల్లోని సగటు వేతనాలతో పాటు ఉద్యోగుల జీతాలు ఎలా విస్తరించి ఉన్నాయో కూడా గమనించాలి.

A కంపెనీలో మెజారిటీ ఉద్యోగుల (400 మంది) జీతాలు కేవలం ₹. 1000 – 2500 పరిధిలో ఉండగా 100 మంది ఉద్యోగుల జీతాలు మాత్రం ₹. 18,000గా ఉన్నాయి. అంటే ఈ కంపెనీలో జీతాలు ఎక్కువ పరిధిలో విస్తరించి ఉన్నాయి లేదా ఉద్యోగుల జీతాల్లో అసమానతలు ఎక్కువగా ఉన్నాయి. ఇందుకు భిన్నంగా B - కంపెనీలో అందరి వేతనాలు ₹. 4000–6000 పరిధిలోనే విస్తరించి ఉన్నాయి. అంటే ఇక్కడ జీతాల్లో అసమానతలు తక్కువగా ఉన్నాయి లేదా జీతాల్లో స్థిరత్వం లేదా నిలకడ ఎక్కువగా ఉందని చెప్పొచ్చు. కాబట్టి A కంటే B కంపెనీలో చేరడానికి ప్రాధాన్యమివ్వాలి.

విస్తరణ కొలతల్లో ప్రధానమైనవి 5

1. వ్యాప్తి (Range)
2. మధ్యమ విచలనం/సగటు విచలనం (Mean Deviation)
3. చతుర్థాంశ విచలనం (Quartile Deviation)
4. ప్రామాణిక విచనలం (Standard Deviation)
5. లారెంజ్ వక్రం (Lorenz Curve)

పరీక్షల దృష్ట్యా వ్యాప్తి, మధ్యమ విచలనం ప్రామాణిక విచలనాలు అవసరం.

వ్యాప్తి: వ్యక్తిగత శ్రేణుల్లో, విచ్ఛిన్న శ్రేణుల్లో వ్యాప్తి = గరిష్ట రాశి – కనిష్ట రాశి

వ్యాప్తి గుణకం = గరిష్టరాశి–కనిష్టరాశి/ గరిష్టరాశి+కనిష్టరాశి

వ్యాప్తి గుణకానికి ప్రమాణాలు ఉండవు. ఇది ఎప్పుడూ 0, 1ల మధ్యనే ఉంటుంది.

ఉదా: i) 9, 12, 15, 18, 21

ii) 1, 8, 15, 22, 29

మొదటి శ్రేణి వ్యాప్తి = 21–9 = 12

వ్యాప్తి గుణకం=21–9/21+9 =12/30=0.4

రెండో శ్రేణి వ్యాప్తి = 29–1=28

వ్యాప్తి గుణకం =29–1/29+1 = 28/30 = 0.933

ప్రాధాన్యత: వ్యాప్తి లేదా వ్యాప్తి గుణకం తక్కు వగా ఉన్న దత్తాంశంలో స్థిరత్వం/నిలకడ (StasilityIConsistency) ఎక్కువగా ఉన్నట్లు.

పై ఉదాహరణలో రెండో శ్రేణి కంటే మొదటి శ్రేణిలో స్థిరత్వం లేదా నిలకడ ఎక్కువ అని చెప్పొచ్చు.

ఉదా: కింది దత్తాంశ వ్యాప్తి, వ్యాప్తి గుణకాలు గణించండి.

మార్కులు	3	5	10	15	20
విద్యార్థుల సంఖ్య	**20**	**30**	**40**	**50**	**10**
మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య			**150**		

సమాధానం: విచ్ఛిన్న శ్రేణుల్లో వ్యాప్తిని గణించాలంటే పౌనఃపున్యాలతో అవసరం లేదు. దత్తాంశం

ప్రకారం గరిష్ట మార్కులు = 20, కనిష్ట మార్కులు = 3. ∴ వ్యాప్తి=20–3=17 మార్కులు

వ్యాప్తి గుణకం = 20–3/20+3 =17/23 = 0.73

ఉదా: కింది దత్తాంశ వ్యాప్తి, వ్యాప్తి గుణకాలు గణించండి.

ఆదాయం (₹ వేలల్లో)	**కుటుంబాల సంఖ్య**
1 - 4	9
5 - 8	15
9 -12	20
13 - 16	3
మొత్తం	47

సమాధానం: పౌనఃపున్య విభాజనంలో వ్యాప్తి గణించాలంటే పౌనఃపున్యాలతో అవసరం లేదు. దత్తాంశం నుంచి గరిష్ట ఆదాయం = ₹.16,000

కనిష్ట ఆదాయం = ₹. 1000

∴ వ్యాప్తి = 16000–1000 = ₹. 15,000

వ్యాప్తి గుణకం = 16000–1000/

16000+1000 = 15000/17000 = 0.88

నోట్: వ్యాప్తిని సులభంగా గణించొచ్చు, సులభంగా అవగాహన చేసుకోవచ్చు. కానీ దత్తాంశంలోని విస్తరణను కొలవడానికి ఇది అంత కచ్చితమైన కొలత కాదు.

మధ్యమ విచలనం: దత్తాంశంలోని రాశుల సగటు నుంచి ఆయా రాశుల విచనాల పరమ మూల్యాల అంకమధ్యమాన్ని మధ్యమ విచలనం అంటారు. ఈ నిర్వచనంలో సగటు అంటే అంకమధ్యమం, మధ్యగతం, బాహుళ్యకంల్లో ఏదైనా కావొచ్చు. ఐతే సాధారణంగా అంకమధ్యమాన్ని తీసుకుంటాం. ఈ నిర్వచనం ప్రకారం $x_1, x_2, x_3,\ldots x_n$ల మధ్యమ విచలనం =

$$= \frac{\Sigma|x_i - \bar{x}|}{n}$$

x_i ⟶ ఆయా రాశులు

$\bar{x}$ ⟶ రాశుల సగటు

n ⟶రాశుల సంఖ్య

ప్రాధాన్యత: మధ్యమ విచలనం తక్కువగా ఉన్న దత్తాంశంలో నిలకడ/స్థిరత్వం ఎక్కువగా ఉన్నట్లు.

ఉదా: A, B అనే రెండు యంత్రాలు బిస్కెట్లు ప్యాక్ చేయడానికి వాడుతున్నారు. ఒక్కో బిస్కెట్ ప్యాకెట్ బరువు 200 గ్రాములు ఉండాలి. ప్రతి యంత్రం నుంచి 10 శాంపిల్ బిస్కెట్ ప్యాకెట్లను సేకరించి వాటి బరువు తూస్తే ఈ విధంగా నమోదయ్యాయి (గ్రాముల్లో).

యంత్రం A: 196, 198, 198, 199, 200, 200, 201, 201, 202, 205

యంత్రం B: 194, 194, 195, 198, 200, 201, 201, 204, 206, 207.

ఐతే మధ్యమ విచలనాన్ని ఉపయోగించి రెండింటిలో ఏ యంత్రం ఎక్కువ కచ్చితమైందో కనుక్కోండి. (సివిల్స్, మెయిన్స్-2002)

సమాధానం: యంత్రం 'A' నుంచి సేకరించిన బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల సగటు బరువు $\bar{x}$ = బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల బరువుల మొత్తం/బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల సంఖ్య

= 196+198+198+....+205/10

= 2000/10 = 200 గ్రాములు

ఇదే విధంగా యంత్రం 'B' నుంచి సేకరించిన బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల సగటు బరువు

= 194+194+195+....+207/10

= 2000/10 = 200 గ్రాములు

ఇక్కడ సగటు బరువు అంటే బరువుల అంకమధ్యమం అనే విషయాన్ని గమనించాలి. రెండు యంత్రాలు ప్యాక్ చేసిన బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల సగటు బరువులు సమానంగా ఉన్నాయి. ఇప్పుడు మధ్యమ విచలనాన్ని ఉపయోగించి ఏ యంత్రం బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల బరువులు ఎక్కువ నిలకడ లేదా స్థిరత్వాన్ని ప్రదర్శిస్తున్నాయో కనుగొందాం.

A యంత్రం బరువు (x_i)	$\|x_i - \bar{x}\|$	B యంత్రం బరువు (y_i)	$\|y_i - \bar{y}\|$
196	4	194	6
198	2	194	6
198	2	195	5
199	1	198	2
200	0	200	0
200	0	201	1
201	1	201	1
201	1	204	4
202	2	206	6
205	5	207	7
$\sum\|x_i - \bar{x}\|$	= 18	$\sum\|y_i - \bar{y}\|$	= 38

యంత్రం 'A నుంచి సేకరించిన బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల బరువుల మధ్యమ విచలనం =

$= \frac{\Sigma |x_i - \bar{x}|}{n}$ = 18/10

($\because$ n = బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల సంఖ్య = 10)

= 1.8 గ్రాములు .... (1)

ఇదే విధంగా యంత్రం B మధ్యమ విచలనం

= 38/10 = 3.8 గ్రాములు......(2)

అంటే యంత్రం A ప్యాక్ చేసిన బిస్కెట్ ప్యాకెట్ల బరువులు 200 గ్రాములు (సగటు బరువు) నుంచి సగటున 1.8 గ్రాము విచలనాన్ని ప్రదర్శిస్తున్నాయి.

∴ (1), (2)ల నుంచి మధ్యమ విలచనం తక్కువగా ఉన్న యంత్రం –A నమ్మశక్యమైనదని చెప్పొచ్చు.

విచ్ఛిన్న శ్రేణుల మధ్యమ విలచనం:

మధ్యమ విచలనం = $\frac{\Sigma|f_i d_i|}{\Sigma f_i}$

$f_i \rightarrow$ పౌనఃపున్యం, $d_i = x_i - \bar{x}$

$xi \rightarrow$ ఆయా రాశులు,

$\bar{x} \rightarrow$ రాశుల సగటు

ఉదా: కింది దత్తాంశం మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

బరువులు (kg)	**వ్యక్తుల సంఖ్య**
30	20
35	30
40	30
45	20
మొత్తం	100

సమాధానం: దత్తాంశంలో ఇచ్చిన బరువులు రాశులు (x_i), వ్యక్తుల సంఖ్యను పౌనఃపున్యాలు (f_i) అనుకొని పట్టీకరించగా –

x_i	f_i	$f_i x_i$	$d_i = x_i - \bar{x}$	$\|f_i d_i\|$
30	20	600	30–37.5= – 7.5	150
35	30	1050	35–37.5 = –2.5	75
40	30	1200	40–37.5 = 2.5	75
45	20	900	45–37.5 = 7.5	150
Σf_i=100,	$f_i x_i$=	3750		$\Sigma\|f_i d_i\|$=450

పై దత్తాంశం అంకమధ్యమం $(\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

= 3750/100=37.5 kgs

ఇప్పుడు పై దత్తాంశం మధ్యమ విచలనం

$$= \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = \frac{450}{100} = 4.5 \text{kgs}$$

అంటే సగటున విద్యార్థుల బరువులు 37.5 kgs నుంచి 4.5 kgs విచలనాన్ని కలిగి ఉంటాయని అర్థం.

పౌనఃపున్య విభాజనం మధ్యమ విచలనం:

మధ్యమ విచలనం $= \frac{\Sigma|f_i d_i|}{\Sigma f_i}$

$f_i \longrightarrow$ పౌనఃపున్యం, $d_i = x_i - \bar{x}$

$x_i \longrightarrow$ తరగతి మధ్యవిలువ $\bar{x} \longrightarrow$ సగటు

ఉదా: ఒక తరగతిలోని విద్యార్థులకు ఒక పరీక్ష లో వచ్చిన మార్కులు కింది విధంగా ఉన్నాయి. మార్కుల మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

మార్కులు	**విద్యార్థుల సంఖ్య**
10-20	30
20-30	20
30-40	20
40-50	30
మొత్తం	100

సమాధానం: తరగతి మధ్య విలువ (x_i) = దిగువహద్దు+ఎగువహద్దు/2 అనే సూత్రాన్ని ఉపయోగించి ఆయా తరగతుల మధ్య విలువలు కనుగొని పట్టీకరించగా –

x_i	f_i	$f_i x_i$	$d_i = x_i - \bar{x}$	$\|f_i d_i\|$
15	30	450	15–30 = – 15	450
25	20	500	25–30 = – 5	100
35	20	700	35–30 = 5	100
45	30	1350	45–30 = 15	450
$\Sigma f_i=100, \Sigma f_i x_i=3000$				$\Sigma\|f_i d_i\|=1100$

పై దత్తాంశం అంకమధ్యమం $(\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

= 3000/100 = 30 మార్కులు

పై దత్తాంశం మధ్యమ విచలనం $= \frac{\Sigma|f_i d_i|}{\Sigma f_i}$

= 1100/100 = 11 మార్కులు

నోట్: జాతీయాదాయం పంపిణీలోని అసమానతలు గణించడానికి సాధారణంగా మధ్యమ విచలనాన్నే వాడుతారు.

సాంఖ్యక శాస్త్రం-8

ప్రామాణిక విచలనం
(Standard Deviation)

విస్తరణ కొలతల్లో ప్రధానమైంది ప్రామాణిక విచలనం. దీన్నే క్రమ విచలనం లేదా వర్గ విచలనం అని కూడా అంటారు.

విస్తృతి: అంకమధ్యమం నుంచి ఆయా రాశుల విచలనాల వర్గాల అంక మధ్యమాన్నే విస్తృతి అంటారు. విస్తృతిని 'σ^2'తో సూచిస్తారు.

ప్రామాణిక విచలనం: విస్తృతి ధనాత్మక వర్గమూలాన్నే ప్రామాణిక విచలనం అంటారు. దీన్ని 'σ' అనే గ్రీక్ అక్షరంతో సూచిస్తారు.

పై నిర్వచనం ప్రకారం విస్తృతి, ప్రామాణిక విచలనాల సూత్రాలు రాద్దాం. $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ అనే 'n' రాశులుంటే.. వాటి అంకమధ్యమం = $\bar{x}$ అనుకుంటే..

రాశులు	విచలనాలు	విచలనాల వర్గాలు
x_1	$x_1 - \bar{x}$	$(x_1 - \bar{x})^2$
x_2	$x_2 - \bar{x}$	$(x_2 - \bar{x})^2$
x_3	$x_3 - \bar{x}$	$(x_3 - \bar{x})^2$
;	;	;
;	;	;
x_n	$x_n - \bar{x}$	$(x_n - \bar{x})^2$

విచలనాల వర్గాల మొత్తం = $\sum (x_n - \bar{x})^2$

విస్తృతి = విచలనాల వర్గాల అంకమధ్యమం =

$\frac{\sum (x_n - \bar{x})^2}{n}$;

ప్రామాణిక విచలనం $(\sigma) = +\sqrt{\frac{\sum(x_n - \bar{x})^2}{n}}$

నోట్: ప్రామాణిక విచలనం విలువ ఎల్లప్పుడూ ధనాత్మకంగానే ఉంటుంది.

ప్రామాణిక విచలనానికి మరో సూత్రం:

ప్రామాణిక విచలనం $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum x_n^2}{n} - (\bar{x})^2}$

ఈ సూత్రం కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాల్లో చాలా అవసరం. ఉదాహరణకు ఇచ్చిన రాశుల అంకమధ్యమం సంక్లిష్టంగా ఉన్నప్పుడు, ఇచ్చిన రాశుల్లో కొన్ని చరరాశులు ఉన్నప్పుడు, ప్రామాణిక విచలనంలోని పొర పాట్లను సవరించడానికి రెండో సూత్రాన్ని వాడతాం.

ఉదా: ఒక బ్యాట్స్‌మ్యాన్ తన చివరి 5 మ్యాచ్‌ల్లో చేసిన పరుగులు ఈ విధంగా ఉన్నాయి. 40, 50, 60, 40, 50. ఐతే అతని పరుగుల ప్రామాణిక విచలనాన్ని కనుక్కోండి?

సమాధానం: అంకమధ్యమం $(\bar{x})$=

రాశుల మొత్తం/రాశుల సంఖ్య

కాబట్టి అతని పరుగుల అంకమధ్యమం $(\bar{x})$

$= \frac{40+50+60+40+50}{5} = \frac{240}{5} = 48$

రాశులు (x_n)	విచలనాలు $(x_n - \bar{x})$	విచలనాల వర్గాలు $(x_n - \bar{x})^2$
40	40-48 = –8	64
50	50-48 = 2	4
60	60-48 = 12	144
40	40-48 = –8	64
50	50-48 = 2	4

$\sum(x_n - \bar{x})^2 = 280$

పై దత్తాంశం ప్రామాణిక విచలనం

$= \sqrt{\frac{\sum(x_n - \bar{x})^2}{n}} \quad = \sqrt{\frac{280}{5}} = \sqrt{56} = 7.48$

∴ బ్యాట్స్‌మ్యాన్ పరుగుల ప్రామాణిక విచలనం

= 7.48 పరుగులు

ఉదా: మొదట 'n' సహజ సంఖ్యల ప్రామాణిక విచలనాన్ని కనుక్కోండి?

సమాధానం: ఈ సమస్యను సాధించాలంటే ప్రామాణిక విలచనం, రెండో సూత్రాన్ని ఉపయోగించాలి.

మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల మొత్తం =

$$\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$$

మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల అంకమధ్యమం $(\bar{x})$

$$= \frac{\Sigma n}{n} = \frac{n(n+1)}{2\times n} = \frac{n+1}{2}$$

రాశులు(x_n)	రాశుల వర్గాలు $(x^2{}_n)$
1	1^2
2	2^2
3	3^2
;	;
;	;
n	n^2

$$\sum x_n^2 = \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2\right)$$

$$= \Sigma n^2$$

కానీ మొదట 'n' సహజ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తం

$$\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \sum x_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

పై దత్తాంశం ప్రామాణిక విచలనం

$$= \sqrt{\frac{\sum x_n^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{n+1}{2}\left[\frac{2n+1}{3}-\frac{n+1}{2}\right]}$$

$$=\sqrt{\frac{n+1}{2}\left[\frac{4n+2-3n-3}{6}\right]}$$

$$=\sqrt{\frac{n+1}{2}\left(\frac{n-1}{6}\right)} \quad =\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

∴ మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల ప్రామాణిక విచలనం = $\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

విచలన గుణకం: విచలన గుణకం =

ప్రామాణిక విచలనం/అంకమధ్యమం $\times 100$

$=\frac{100\sigma}{\bar{x}}$

విచలన గుణకానికి ప్రమాణాలు ఉండవు.

రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ దత్తాంశాల్లో నిలకడ లేదా స్థిరత్వాన్ని కొలవడానికి విచలన గుణకం తోడ్పడుతుంది. విచలన గుణకం తక్కువగా ఉన్న దత్తాంశంలో రాశుల విస్తరణ తక్కువగా ఉంటుంది. అంటే ఆ దత్తాంశంలో నిలకడ/స్థిరత్వం ఎక్కువ.

ఎంపిక: ఆటగాళ్లు, విద్యార్థులు, ఉత్పత్తులు, కంపెనీలు మొదలైన వాటిని ఎంపిక చేసుకోవాలంటే రెండు అంశాలు దృష్టిలో ఉంచుకోవాలి.

i) **ప్రతిభ/నాణ్యత:** దీన్ని అంకమధ్యమం ద్వారా కొలుస్తాం.

ii) **నిలకడ/స్థిరత్వం:** దీన్ని విచలన గుణకాన్ని ఉపయోగించి కొలవాలి.

ఉదా: ముగ్గురు ఆటగాళ్లు తమ చివరి 10 మ్యాచ్‌ల్లో చేసిన పరుగుల సగటు వరుసగా 50, 48, 12. వారి పరుగుల ప్రామాణిక విచలనాలు వరుసగా 15, 12, 2 ఐతే ముగ్గురిలో జట్టులోకి ఒకరినే ఏ విధంగా ఎంపిక చెయొచ్చు.

సమాధానం: మొదటి ఆటగాడి సగటు పరుగులు (50) అందరి కంటే గరిష్టం. అంటే ముగ్గురిలో అతని ప్రతిభ మెరుగ్గా ఉంది ——— (1)

విచలన గుణకం = $\frac{\text{ప్రామాణిక విచలనం}}{\text{అంకమధ్యమం}} \times 100$

ఈ సూత్రం ప్రకారం, ముగ్గురు ఆటగాళ్ల విచలన గుణకాలు వరుసగా =

$$\frac{15}{50}\times 100,\ \frac{12}{48}\times 100,\ \frac{2}{12}\times 100$$

= 30, 25, 16.666

అంటే విచలన గుణకం కనిష్ఠంగా (16.66) ఉన్న మూడో ఆటగాడి ప్రదర్శనలో నిలకడ ఎక్కువగా ఉంది ——— (2)

∴ (1), (2)ల నుంచి ఎక్కువ పరుగులు చేసే వ్యక్తి కావాలంటే మొదటి ఆటగాడిని; నిలకడగా ఆడే వ్యక్తి కావాలంటే మూడో ఆటగాడిని ఎంపిక చేసుకోవాలి.

ఉదా: ఇద్దరు బ్యాట్స్‌మెన్లు (A, B) తమ చివరి 5 మ్యాచ్‌ల్లో చేసిన పరుగులు ఈ విధంగా ఉన్నాయి. ఐతే జట్టులోకి ఎవరిని ఎంపిక చేయాలి?

A	40, 50, 60, 40, 50
B	100, 120, 5, 5, 10

సమాధానం: సగటు పరుగులు =

మొత్తం పరుగులు/మ్యాచ్‌ల సంఖ్య

చివరి 5 మ్యాచ్‌ల్లో 'A' సగటు పరుగులు

$$\frac{40+50+60+40+50}{5}=\frac{240}{5}=48,$$

'B' సగటు పరుగులు =

$$\frac{100+120+5+5+10}{5}=\frac{240}{5}=48$$

A, Bల ఇద్దరి సగటు పరుగులు సమానం కాబట్టి ఆ ఇద్దరిలో నిలకడగా ఆడే ఆటగాడిని ఎంపిక చేయాలి. నిలకడను కొలవడానికి విచలన గుణకం కచ్చితమైంది. మొదటి ఉదాహరణలో మనం 'A' ప్రామాణిక విచలనాన్ని కనుగొన్నాం.

'A' ప్రామాణిక విచలనం = 7.48

విచలన గుణకం = ప్రామాణిక విచలనం/ అంకమధ్యమం $\times 100$

$$=\frac{7.48}{48}\times 100=15.58 \quad \text{——} \ (1)$$

'B' ప్రామాణిక విచలనం

రాశులు (x_n)	**విచలనాలు** $(x_n-\bar{x})$	**విచలనాల వర్గాలు** $(x_n-\bar{x})^2$
100	100-48 = +52	2704

120	120-48 = +72	5184
5	5-48 = –43	1849
5	5-48 = –43	1849
10	10-48 = –38	1444

$$\sum\left(x_n - \bar{x}\right)^2 = 13030$$

పై దత్తాంశం ప్రామాణిక విచలనం =

$$\sqrt{\frac{\sum\left(x_n - \bar{x}\right)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{13030}{5}} = \sqrt{2606} = 51.04$$

⇒ 'B' విచలన గుణకం = $\frac{51.04}{48} \times 100$

= 106.33 _____ (2)

∴ (1), (2)ల నుంచి తక్కువ విచలన గుణకం కలిగినటువంటి 'A' నిలకడైన ఆటగాడు అని చెప్పొచ్చు. కాబట్టి జట్టులోకి 'A'ను ఎంపిక చేయాలి.

ఉదా: A, B అనే ఇద్దరు విద్యార్థులకు '6' పరీక్షల్లో వచ్చిన మార్కులు ఈ విధంగా ఉన్నాయి.

A	73,	19,	63,	58,	43,	39
B	66,	42,	68,	48,	61,	69

ఐతే i) ఎవరి ప్రతిభ మెరుగ్గా ఉంది.

ii) ఎవరు నిలకడైన ప్రతిభ కనబరిచారు.

సమాధానం: i) సగటు మార్కులు =

మొత్తం మార్కులు/పరీక్షల సంఖ్య

'A' సగటు మార్కులు $(\bar{x})$

$$= \frac{73+19+63+58+43+39}{6} = \frac{295}{6} = 49.166$$

'B' సగటు మార్కులు $(\bar{y})$

$$= \frac{66+42+68+48+61+69}{6} = \frac{354}{6} = 59$$

'A' కంటే 'B' సగటు మార్కులు అధికం కాబట్టి 'B' ప్రతిభ మెరుగ్గా ఉందని చెప్పొచ్చు.

ii) ప్రతిభలోని నిలకడను కొలవాలంటే విచలన గుణకాలు కనుక్కోవాలి.

'A' ప్రామాణిక విచలనం

రాశులు (x_n)	రాశుల వర్గాలు (x^2_n)
73	5329
19	361
63	3969
58	3364
43	1849
39	1521

$$\sum x_n^2 = 16,393$$

A - ప్రామాణిక విచలనం = $\sqrt{\frac{\sum x_n^2}{n} - (\bar{x})^2}$

$$= \sqrt{\frac{16393}{6} - (49.166)^2}$$

$$= \sqrt{2732.166 - 2417.295}$$

$$= \sqrt{314.870} = 17.74$$

A - విచలన గుణకం =

$$\frac{17.74}{49.166} \times 100 = 36.08 \quad \text{—— (1)}$$

ఇదే విధంగా 'B' విచలన గుణకాన్ని కనుక్కోవాలి.

రాశులు (y_n)	రాశుల వర్గాలు (y^2_n)
66	4356
42	1764
68	4624

48	2304
61	3721
69	4761

$$\sum y_n^2 = 21,530$$

ఈ దత్తాంశం ప్రామాణిక విచలనం =

$$\sqrt{\frac{\sum y_n^2}{n} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{21530}{6} - (59)^2}$$

$$= \sqrt{3588.33 - 3481} = \sqrt{107.333} = 10.36$$

B - విచలన గుణకం =

$$\frac{10.36}{59} \times 100 = 17.56 \quad \text{——— (2)}$$

$\therefore$ (1), (2)ల నుంచి 'B' విచలన గుణకం తక్కువ కాబట్టి 'A' కంటే 'B' నిలకడైన ప్రతిభ కనబరుస్తున్నాడని చెప్పొచ్చు.

ద్విసంఖ్యామానం

మనం రోజువారీ జీవితంలో వాడే సంఖ్యల్లో 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 అనే పది అంకెలు ఉంటాయి. అందువల్ల ఈ సంఖ్యలను దశాంశమానంలో ఉన్నాయి అని అంటారు.

ఉదాహరణ:

మనం నిత్య జీవితంలో వాడే అన్ని సంఖ్యలు.

ఏదైనా ఒక సంఖ్య దశాంశమానంలో ఉంది అని సూచించాలంటే కింది విధంగా రాస్తాం. (Decimal System)

ఉదాహరణ:

$(596)_{10}$ లేదా $596_{(10)}$.

పై విధంగా కాకుండా కేవలం '596' అని రాసినా కూడా ఆ సంఖ్య దశాంశమానంలో ఉన్నట్లు లెక్క.

ద్విసంఖ్యామానం:

'ద్వి' అంటే రెండు అని అర్థం. ద్విసంఖ్యామానంలో మనం '0', '1' అనే రెండు అంకెలను మాత్రమే వాడతాం. ద్విసంఖ్యామానంలో ఏ సంఖ్య అయినా ఈ రెండు అంకెలతో మాత్రమే ఏర్పడుతుంది. ద్విసంఖ్యామానం అర్థంకావాలంటే ముందుగా '2' ఘాతాలను అర్థం చేసుకోవాలి.

'2' ఘాతాలు:

$2^0 = 1$ (ఏ సంఖ్యకైనా ఘాతం సున్నా ఉంటే దాని విలువ '1')

$2^1 = 2$

$2^2 = 2 \times 2 = 4$

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

అలాగే $2^5 = 32$

$2^6 = 64$,

$2^7 = 128$

$2^8 = 256$

$2^9 = 512$

$2^{10} = 1,024$.

పై విలువలను గుర్తుంచుకోవాలి.

దశాంశమానం నుంచి ద్విసంఖ్యామానంలోకి మార్చడం:

ఇప్పుడు దశాంశమానంలో ఇచ్చిన ఒక సంఖ్యను ద్విసంఖ్యామానంలోకి మార్చడమెలాగో చూద్దాం.

ఉదాహరణ:

$(26)_{10}$ను ద్విసంఖ్యామానంలోకి మార్చుదాం.

2 | 26
2 | 13 – 0
2 | 6 – 1
2 | 3 – 0
2 | 1 – 1
  0 – 1

‘26’ను ‘2’తో భాగిస్తే భాగఫలం ‘13’, శేషం ‘0’ వస్తుంది. శేషాన్ని పక్కన రాశాం. ‘13’ను మళ్లీ ‘2’తో భాగిస్తే భాగఫలం ‘6’, శేషం ‘1’ వస్తుంది. ఈ విధంగా భాగఫలం ‘0’ వచ్చేంతవరకు ‘2’తో భాగిస్తూ పోవాలి. వచ్చిన శేషాలను (‘0’ లేదా ‘1’) పక్కన రాయాలి. ఇప్పుడు వచ్చిన శేషాలను కింది నుంచి పైకి రాయాలి. ఇలా రాస్తే మనకు ‘11010’ వస్తుంది. ఇదే మనకు కావాల్సిన ద్విసంఖ్యామా నంలోని సంఖ్య.

అంటే $(26)_{10} = (11010)_2$

$(11010)_2$ అని రాస్తే ‘11010’ అనే సంఖ్య ద్విసం ఖ్యామానంలో ఉన్నట్లు అర్థం. దీన్నే $11010_{(2)}$ అని కూడా రాయవచ్చు.

ఉదాహరణ: $(150)_{10}$ని ద్విసంఖ్యామానంలోకి మార్చండి.

సాధన:

2 | 150
2 | 75 – 0
2 | 37 – 1
2 | 18 – 1
2 | 9 – 0
2 | 4 – 1
2 | 2 – 0
2 | 1 – 0
  0 | – 1

వచ్చిన శేషాలను కింది నుంచి పైకి రాస్తే '10010110' అనే సంఖ్య వస్తుంది.

$\therefore (150)_{10} = (10010110)_2$

ద్విసంఖ్యామానం నుంచి దశాంశమానంలోకి మార్చడం:

ఇప్పుడు ద్విసంఖ్యామానంలో ఇచ్చిన ఒక సంఖ్యను దశాంశమానంలోకి మార్చడం ఎలాగో చూద్దాం.

ఉదాహరణ:

$(11010)_2$ను దశాంశమానంలోకి మార్చుదాం.

ఇచ్చిన సంఖ్య → 1 1 0 1 0

'2' ఘాతాలు → 16 8 4 2 1

'2' ఘాతాలను 2^0 (=1)తో మొదలుపెట్టి ఇచ్చిన సంఖ్యలోని కుడివైపు చివరి అంకె నుంచి ఎడమవైపు చివరి అంకె వరకు కింద రాసుకోవాలి. ఇప్పుడు '1'అనే అంకెల కింద ఉండే సంఖ్యలను కలపాలి. అంటే 16 + 8 + 2 = 26 వస్తుంది.

కాబట్టి సమాధానం '26' అని అర్థం.

$\therefore (11010)_2 = (26)_{10}$

ఉదాహరణ:

$(1011011)_2$ను దశాంశమానంలోకి మార్చండి.

సాధన:

ఇచ్చిన సంఖ్య →1 0 110 1 1

'2' ఘాతాలు → 643216 8 4 2 1

64 + 16 + 8 + 2 + 1 = 91

∴సమాధానం '91'

అంటే $(1011011)_2 = (91)_{10}$

ఈ విధంగా ఒక సంఖ్యను ద్విసంఖ్యామానం నుంచి దశాంశమానంలోకి లేదా దశాంశమానం నుంచి ద్విసంఖ్యామానంలోకి మార్చవచ్చు.

ఉదాహరణ:

కింది సంఖ్యాశ్రేణిలోని ఖాళీని పూరించండి.

0010, 0011, 0101, ————, 1011.

(ఏపీపీఎస్సీ, గ్రూప్-1 మోడల్ పేపర్)

సాధన:

ఇచ్చిన శ్రేణిలోని సంఖ్యలు ద్విసంఖ్యామానంలో ఉన్నాయి. వాటిని దశాంశమానంలోకి మారిస్తే

0 0 1 0, 0 0 1 1, 0 1 0 1, —, 1 0 1 1
8 4 2 1, 8 4 2 1, 8 4 2 1, —, 8 4 2 1
= 2, 2 + 1, 4 + 1, ———, 8 + 2 + 1
= 2, 3, 5, ——, 11

ఈ శ్రేణి వరుస ప్రధాన సంఖ్యలతో ఏర్పడింది.

కాబట్టి ఖాళీలో '7' అనే ప్రధాన సంఖ్య వస్తుంది.

ఇప్పుడు '7'ను ద్విసంఖ్యామానంలోకి మార్చాలి.

2 | 7
2 | 3 – 1
2 | 1 – 1
  0 – 1

$\therefore (7)_{10} = (111)_2$

కానీ ఇచ్చిన శ్రేణిలోని సంఖ్యల న్నింటిలోనూ '4' అంకెలు ఉన్నాయి. కాబట్టి సమాధానం '0111' అవుతుంది.

ఉదాహరణ:

కింది సంఖ్యాశ్రేణిలోని ఖాళీని పూరించండి.

10001, 10100, 10111, ———, 11101.

(ఏపీపీఎస్సీ, గ్రూప్–1 2008 ఆగస్ట్)

సాధన:

ఇచ్చిన శ్రేణిని దశాంశమానంలోకి మారిస్తే

1 0 0 0 1, 1 0 1 0 0, 1 0 1 1 1, ——,
16 8 4 2 1 16 8 4 2 1 16 8 4 2 1
1 1 1 0 1
16 8 4 2 1
= 16 + 1, 16 + 4, 16 + 4 + 2 + 1, ——,
16 + 8 + 4 + 1
= 17, 20, 23, ——, 29.

ముందు సంఖ్యకు '3' కలిపితే తర్వాత సంఖ్య వస్తుంది.

∴ ఖాళీలో 23 + 3 = '26' వస్తుంది.

'26'ని ద్విసంఖ్యామానంలోకి మార్చిస్తే

2	26
2	13 – 0
2	6 – 0
2	3 – 0
2	1 – 1
	0 – 1

అంటే $(26)_{10} = (11010)_2$

∴ సమాధానం – ‘11010’ అవుతుంది.

ప్రాక్టీస్ క్వశ్చన్స్

1. ‘512’ను ద్విసంఖ్యామానంలోకి మార్చండి.
2. $(10101010)_2$ను దశాంశమానంలోకి మార్చండి.
3. కింది సంఖ్యాశ్రేణిలోని ఖాళీలను పూరించండి.

   ఎ) 00001, 00100, 01001, 10000, _____

   బి) 0010 , 0100, 0110, ______, 1010

   సి) 0001, 0011, 0101, ______, 1001

సమాధానాలు

1. 1000000000 (1 పక్కన ‘9’సున్నాలు)
2. ‘170’
3. ఎ) 11001

   బి) 1000

   సి) 0111